УДК 519.218

М.М. ВАСЬКОВСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The theorems of the existence of weak solutions for stochastic functional differential equation $dX(t) = f(t, X(t), X_t)dt + g(t, X(t), X_t)dW(t)$, $X \in R^d$, are investigated, where $X_t = \{X(t+\tau)| -h \le \tau \le 0\} \in C([-h,0] \to R^d)$, $W(t)$ is a Brownian motion, functions $f : R_+ \times R^d \times C([-h,0] \to R^d) \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \times C([-h,0] \to R^d) \to R^{d\times d}$ are Borel measurable, continuous in $\varphi \in C([-h,0] \to R^d)$ and locally bounded.

Исследуем существование слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений.

Рассмотрим стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$dX(t) = f(t, X(t), X_t)dt + g(t, X(t), X_t)dW(t), \;\; X \in R^d, \; t \in R_+, \tag{1}$$

где $f : R_+ \times R^d \times C([-h,0] \to R^d) \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \times C([-h,0] \to R^d) \to R^{d\times d}$; $W(t)$ – d-мерное броуновское движение, $X_t = \{X(t+\tau)| -h \le \tau \le 0\} \in C([-h,0] \to R^d)$, $C([-h,0] \to R^d)$ – пространство непрерывных функций $\varphi : [-h,0] \to R^d$ с нормой $\|\varphi(t)\|_C = \max\limits_{-h \le t \le 0} \|\varphi(t)\|_{R^d}$.

Теорема существования слабых решений уравнения (1) с непрерывными функциями f, g была доказана Е.Ф. Царьковым [1]. В настоящей работе получена теорема существования слабых решений уравнения (1) с измеримыми по Борелю локально ограниченными функциями f, g такими, что компоненты матриц $f, \sigma = gg^T$ удовлетворяют некоторому условию *A*, которое приведено ниже. Нами обобщается понятие слабого решения уравнения (1): под слабым решением уравнения (1) понимаем слабое решение некоторого стохастического дифференциально-функционального включения и называем β-слабым решением уравнения (1). В статье приводится теорема существования β-слабых решений уравнения (1), когда функции $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ измеримы по Борелю, локально ограничены и непрерывны по φ.

Будем использовать следующие обозначения:

$a \wedge b = \min\{a, b\}$; $a \vee b = \max\{a, b\}$; ψ^{ij} – компонента с индексами *i, j* матричной функции ψ; P^x – распределение вероятностей случайной величины *x*; равенство $P^x = P^y$ означает совпадение распределений случайных величин *x, y*; *E*(*x*) – математическое ожидание случайной величины *x*; 1_A – характеристическая функция множества *A*; $cl(A)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств множества *A*; $\|X\| = \|(x_1, \ldots, x_d)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$; п. н. – почти наверное; $(S, B(S))$ – топологическое пространство *S* с топологической σ-алгеброй *B*(*S*).

Определение 1. Под слабым решением уравнения (1) с начальным распределением ν будем понимать процесс *X*(*t*), $t \in [-h, +\infty)$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, *F*, *P*) с потоком σ-алгебр F_t, такой, что:

1) существует (F_t)-момент остановки *e* такой, что процесс $X(t)1_{[-h,e)}(t)$ (F_t)-согласован, имеет непрерывные траектории при $t < e$ п. н. и $\overline{\lim\limits_{t \uparrow e}} \|X(t)\| = \infty$, если $e < \infty$ (*e* называется моментом взрыва процесса *X*(*t*) и обозначается $e(X(t))$);

2) существует (F_t)-броуновское движение *W*(*t*), *W*(0) = 0 п. н.;

3) процессы $f(t, X(t), X_t)$, $g(t, X(t), X_t)$, $t \ge 0$, принадлежат соответственно пространствам $L_1^{\text{loc}}, L_2^{\text{loc}}$, где L_i^{loc} – множество всех измеримых (F_t)-согласованных процессов θ таких, что для любого $t \in [0, e)$ $\int\limits_0^t \|\theta(s, \varpi)\|^i ds < \infty$ п. н., $i \in \{1, 2\}$;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in [-h, e)$

$$X(t) = \begin{cases} \psi(t), \ t \in [-h, 0], \\ \psi(0) + \int\limits_0^t f(s, X(s), X_s)ds + \int\limits_0^t g(s, X(s), X_s)dW(s), t \geq 0, \end{cases}$$

процесс $\psi(t), t \in [-h, 0]$, имеет распределение $\nu \in \wp$ ($\wp$ – множество всех вероятностей на $(C([-h,0] \to R^d), B(C([-h,0] \to R^d))))$, т. е. для любого $A \in B(C([-h,0] \to R^d))$ $P(\psi \in A) = \nu(A)$.

Лемма 1. *Пусть функции f, g непрерывны и ограничены. Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(C([-h,0] \to R^d),\ B(C([-h,0] \to R^d)))$ *уравнение* (1) *имеет слабое решение* $X(t)$ *с начальным распределением* ν, *причем* $e(X(t)) = \infty$ *п. н.*

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 1.2.9 [1].

Матрица $\sigma(t, X, \varphi) = g(t, X, \varphi) g^T(t, X, \varphi)$ является симметрической неотрицательной. Существуют измеримые по Борелю ортогональная матрица T и диагональная матрица $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_d\}$ такие, что $\sigma = T\Lambda T^T$. Пусть $g^* = T\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\ \ldots,\ \sqrt{\lambda_d}\right\}$. В дальнейшем будем считать, что в системе (1) $g = g^*$ [2, с. 97–98].

Выберем строки матрицы g с номерами $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Построим множество $H(\alpha_1,\ \ldots, \alpha_l) =$ $= \{(t, x_{\alpha_1},\ \ldots, x_{\alpha_l}) \,|$ для любой открытой окрестности $U\left(t, x_{\alpha_1},\ \ldots, x_{\alpha_l}\right)$ точки $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ существует $a > 0$, что интеграл $\int\limits_{U(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})} \sup\limits_{(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D(0,a)} (\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi))^{-1} dt dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_l}$ либо не определен, либо равен $\infty\}$, где $\sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi) = \begin{pmatrix} g_{\alpha_1} \\ \ldots \\ g_{\alpha_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\alpha_1}^T & \ldots & g_{\alpha_l}^T \end{pmatrix}$, g_{α_j} – строка с номером α_j матрицы g, $D(0, a) = \left\{\left(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi\right) \middle| x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d} \in R,\ \varphi \in C([-h,0] \to R^d),\ \sqrt{x_{\alpha_{l+1}}^2 + \ldots + x_{\alpha_d}^2} + \|\varphi\|_C \leq a\right\}$.

Будем говорить, что вещественная функция $h(t, x_1,\ \ldots, x_d, \varphi)$, $t \in R_+$, $x_1,\ \ldots, x_d \in R$, $\varphi \in C([-h,0] \to R^d))$, удовлетворяет *условию A*, если существуют строки $g_{\alpha_1},\ \ldots,\ g_{\alpha_l}$ матрицы *g* такие, что функция h при каждых фиксированных $(t, x_{\alpha_1},\ \ldots, x_{\alpha_l})$ непрерывна по переменным $\left(x_{\alpha_{l+1}},\ \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi\right)$ и множество $\left\{\left(t, x_1,\ \ldots, x_d, \varphi\right) \middle| (t, x_{\alpha_1},\ \ldots, x_{\alpha_l}) \in H\left(\alpha_1,\ \ldots, \alpha_l\right)\right\}$ содержится во множестве точек непрерывности отображения *h*.

Функция $h : R_+ \times R^d \times C([-h,0] \to R^d) \to R^{d \times r}$ называется локально ограниченной, если для любого $b > 0$ существует постоянная $N(b) > 0$ такая, что $\|h(t, X, \varphi)\| \leq N(b)$ для любых $t \in [0, b]$, $X \in R^d$, $\varphi \in C([-h,0] \to R^d)$ таких, что $\|X\| \leq b, \|\varphi\|_C \leq b$.

Пусть $g^{(1)}$ – $(l \times d)$-матрица, составленная из первых l строк матрицы g, $g^{(2)}$ – $((d - l) \times d)$-матрица, составленная из оставшихся строк матрицы g, $f^{(1)}$ – вектор, состоящий из первых l компонент вектора f, $f^{(2)}$ – вектор, состоящий из оставшихся компонент вектора f.

Построим матрицы $\sigma_n = T\Lambda_n T^T$, где

$$\Lambda_n = \operatorname{diag}\left\{\left(\lambda_1 + \frac{1}{n}\right) \wedge n, \left(\lambda_2 + \frac{1}{n}\right) \wedge n, \ldots, \left(\lambda_d + \frac{1}{n}\right) \wedge n\right\},$$

$$g_n = T\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\left(\lambda_1 + \frac{1}{n}\right) \wedge n}, \ldots, \sqrt{\left(\lambda_d + \frac{1}{n}\right) \wedge n}\right\},$$

$$f_n(t,X)=(f_n^i(t,X)),\ f_n^i(t,X)=(f^i(t,X)\vee(-n))\wedge n,\ i=1,\dots,d,\ n\in N.$$

Матрицы g_n, f_n разобьем на подматрицы $g_n^{(1)}, g_n^{(2)}, f_n^{(1)}, f_n^{(2)}$ так же, как матрицы g, f были разбиты на подматрицы $g^{(1)}, g^{(2)}, f^{(1)}, f^{(2)}$. Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n>0$, что $\det g_n g_n^T=\det\sigma_n\ge\alpha_n$ для всех $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times C([-h,0]\to R^d)$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t,X,\varphi)=f(t,X,\varphi)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(t,X,\varphi)=\sigma(t,X,\varphi)$ в каждой точке $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times$ $\times C([-h,0]\to R^d)$. Пусть $X=(x,y)$, $x\in R^l$, $y\in R^{d-l}$, $\sigma^{(1)}=g^{(1)}g^{(1)T}$, $B_1(0,a)=\left\{x\in R^l\,\big|\,\|x\|\le a\right\}$, $B_2(0,a)=\left\{(y,\varphi)\in R^{d-l}\times C([-h,0]\to R^d)\,\big|\,\|y\|+\|\varphi\|_C\le a\right\}$, $H=\{(t,x)\in R_+\times R^l\mid$ для любой открытой окрестности $U(t,x)$ точки (t,x) существует $a>0$, что интеграл $\int\limits_{U(t,x)}\sup\limits_{y\in B_2(0,a)}\left(\det\sigma^{(1)}\left(\tau,z,y,\varphi\right)\right)^{-1}d\tau dz$ либо не определен, либо равен $\infty\}$, $H^c=(R_+\times R^l)\setminus H$, $(H)_\varepsilon=\left\{(t,x)\in R_+\times R^l\,\middle|\,\sup\limits_{(s,z)\in H}\left(|t-s|+\|x-z\|\right)<\varepsilon\right\}$, $(H)_\varepsilon^c=(R_+\times R^l)\setminus(H)_\varepsilon$.

Построим систему

$$\begin{cases}dx(t)=f^{(1)}(t,x(t),y(t),x_t,y_t)dt+g^{(1)}(t,x(t),y(t),x_t,y_t)dW(t),\\ dy(t)=f^{(2)}(t,x(t),y(t),x_t,y_t)dt+g^{(2)}(t,x(t),y(t),x_t,y_t)dW(t),\end{cases}\tag{2}$$

$$x\in R^l, y\in R^{d-l},\ \ x_t=\left\{x(t+\tau)\,\big|-h\le\tau\le 0\right\},\ \ y_t=\left\{y(t+\tau)\,\big|-h\le\tau\le 0\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $(x(t),y(t))$ *– слабое решение системы* (2), *функции* $f^{(1)},f^{(2)},g^{(1)},g^{(2)}$ *измеримы по Борелю и локально ограничены. Тогда для любых* $a>0, T>0$ *существует постоянная* $c(a,T,l,d)$ *такая, что для любой неотрицательной измеримой по Борелю функции* $h(t,x,y,\varphi)$, $t\in R_+$, $x\in R^l$, $y\in R^{d-l}$, $\varphi\in C([-h,0]\to R^d)$, *такой, что для любого* $b>0$ *отображение* $(t,x)\to\sup\limits_{(y,\varphi)\in B_2(0,b)}h(t,x,y,\varphi)$ *измеримо по Лебегу, имеем*

$$E\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\left(\det\sigma^{(1)}(s,x(s),y(s),x_s,y_s)\right)^{\frac{1}{l+1}}h\left(s,x(s),y(s),x_s,y_s\right)ds\right)\le$$

$$\le c(a,T,l,d)\left(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)}\sup\limits_{(y,\varphi)\in B_2(0,a)}h^{l+1}(s,x,y,\varphi)dsdx\right)^{\frac{1}{l+1}},$$

где $\tau^a=\inf\left\{t\ge 0\,\big|\,\|x(t)\|\vee\|y(t)\|>a\right\}$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1, функция $h(t,x,y,\varphi)$, $t\in R_+, x\in R^l$, $y\in R^{d-l}$, $\varphi\in C([-h,0]\to R^d)$, *неотрицательна, измерима по Борелю, непрерывна по* (y,φ) *при каждых фиксированных* $(t,x)\in R_+\times R^l$. *Тогда для любых* $a\in R_+$, $T\in R_+$ *существует постоянная* $c(a,T,l,d)$ *такая, что для любого* $\varepsilon>0$

$$E\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}1_{(H)_\varepsilon^c}(t,x(t))h\left(t,x(t),y(t),x_t,y_t\right)dt\right)\le$$

$$\le c(a,T,l,d)\left(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)_\varepsilon^c}\sup\limits_{(y,\varphi)\in B_2(0,a)}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\sup\limits_{(y,\varphi)\in B_2(0,a)}h^{l+1}(t,x,y,\varphi)dtdx\right)^{\frac{1}{l+1}},$$

где $\tau^a=\inf\left\{t\ge 0\,\big|\,\|x(t)\|\vee\|y(t)\|>a\right\}$.

Следствие 2. Пусть $a \in R_+, T \in R_+$, *функции f, g измеримы по Борелю и локально ограничены,* $X_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ *– последовательность слабых решений систем*

$$\begin{cases} dx(t) = f_n^{(1)}(t, x(t), y(t), x_t, y_t)dt + g_n^{(1)}(t, x(t), y(t), x_t, y_t)dW(t), \\ dy(t) = f_n^{(2)}(t, x(t), y(t), x_t, y_t)dt + g_n^{(2)}(t, x(t), y(t), x_t, y_t)dW(t), \end{cases}$$

$(\hat{X}_n(t)), n \geq 1$, *– последовательность непрерывных процессов таких, что* $P^{(\hat{X}_n, \hat{\tau}_n^a)} = P^{(X_n, \tau_n^a)}$, $\hat{X}_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} \hat{X}(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ *равномерно на каждом отрезке из* R_+ *п. н.,* $\hat{\tau}_n^a \underset{n\to\infty}{\to} \hat{\tau}^a$ *п. н., где* $\hat{\tau}_n^a, \hat{\tau}^a, \tau_n^a$ *– моменты остановки такие, что* $\|x_n(t)\| \vee \|y_n(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \tau_n^a$, $\|\hat{x}_n(t)\| \vee \|\hat{y}_n(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \hat{\tau}_n^a$, $\|\hat{x}(t)\| \vee \|\hat{y}(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \hat{\tau}^a$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любой неотрицательной измеримой по Борелю непрерывной по* (y, φ) *функции* $h(t, x, y, \varphi)$

$$E\left(\int_0^{T \wedge \hat{\tau}^a} 1_{(H)_\varepsilon^c}(t, \hat{x}(t)) h\left(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{x}_t, \hat{y}_t\right) dt \right) \leq$$

$$\leq c(a, T, l, d) \left(\int\limits_{([0,T] \times B_1(0,a)) \cap (H)_{\varepsilon/2}^c} \sup_{(y,\varphi) \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \sup_{(y,\varphi) \in B_2(0,a)} h^{l+1}(t, x, y, \varphi) dt dx \right)^{\frac{1}{l+1}},$$

где постоянная $c(a, T, l, d)$ *такая же, как в лемме 2.*

Лемма 3. *Пусть* $h(t, x, y, \varphi)$, $t \in R_+$, $x \in R^l$, $y \in R^{d-l}$, $\varphi \in C([-h, 0] \to R^d)$, *– вещественная измеримая по Борелю непрерывная по* (y, φ) *локально ограниченная функция,* $h_n(t, x, y, \varphi) = h(t, x, y, \varphi) * J_n(t, x) = \int\limits_{|t-\tau| \leq \frac{1}{n}, \|x - \eta\| \leq \frac{1}{n}} h(\tau, \eta, y, \varphi) J_n(t - \tau, x - \eta) d\tau d\eta$, $\quad J_n(t, x) = n^{l+1} \zeta(nt, nx)$, $\zeta(t, x)$ *– неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная* 0 *при* $|t| > 1$, $\|x\| > 1$, *для которой* $\int\limits_{|t| \leq 1} dt \int\limits_{\|x\| \leq 1} \zeta(t, x) dx = 1$. *Тогда для любых* $a \in R_+, T \in R_+, \varepsilon > 0$ *имеем*

$$\int\limits_{([0,T] \times B_1(0,a)) \cap (H)_\varepsilon^c} \sup_{(y,\varphi) \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \sup_{(y,\varphi) \in B_2(0,a)} \left| h_n(t, x, y, \varphi) - h(t, x, y, \varphi) \right|^{l+1} dt dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство леммы 2, следствий 1, 2, леммы 3 проводится так же, как доказательство аналогичных утверждений из работы [3].

Лемма 4. *Пусть функции* $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ *измеримы по Борелю, ограничены, непрерывны по* φ, *существует постоянная* $\lambda > 0$ *такая, что* $\det \sigma(t, X, \varphi) \geq \lambda$ *для всех* $t \in R_+, X \in R^d$, $\varphi \in C([-h, 0] \to R^d)$. *Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(C([-h, 0] \to R^d),\ B(C([-h, 0] \to R^d)))$ *уравнение* (1) *имеет слабое решение* $X(t)$ *с начальным распределением* ν, *причем* $e(X(t)) = \infty$ *п. н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим функции $\tilde{f}_n(t, X, \varphi) = f(t, X, \varphi) * J_n(t, X)$, $\tilde{g}_n(t, X, \varphi) = g(t, X, \varphi) * {}$ ${}* J_n(t, X)$, $n \geq 1$. Функции $\tilde{f}_n(t, X, \varphi)$, $\tilde{g}_n(t, X, \varphi)$ непрерывны и ограничены. По лемме 1 для любого натурального n уравнение $dX(t) = \tilde{f}_n(t, X(t), X_t)dt + \tilde{g}_n(t, X(t), X_t)dW(t)$ имеет слабое решение $X_n(t)$, $t \in [-h, +\infty)$, с начальным распределением ν. Так как для любых $s, t \in R_+$ $\sup_n E(\|X_n(t) - X_n(S)\|^4) \leq C|t - s|^2$, $C = \text{const}$, и $P^{X_n(t), t \in [-h, 0]} = \nu$, $n \geq 1$, – плотное семейство во множестве всех вероятностей на $(C([-h,0]\to R^d),\ B(C([-h,0]\to R^d)))$, то выполняются условия теоремы I.4.2 [2]:

$$1)\ \lim_{N\to\infty}\sup_n P\left\{\sup_{t\in[-h,0]}\left|X_n(t)\right|>N\right\}=0;\tag{3}$$

2) для любых $T>0,\ \varepsilon>0$

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_n P\left\{\sup_{\substack{t,s\in[0,T]\\ |t-s|\le h}}\left|X_n(t)-X_n(s)\right|>\varepsilon\right\}=0.\tag{4}$$

Из доказательства теоремы I.4.2 [2] вытекает, что последовательность $X_n,\ n\ge 1,$ плотна в пространстве $C([-h,+\infty)\to R^d)$. Можно построить вероятностное пространство $(\bar\Omega,\bar F,\bar P)$, непрерывные процессы $\bar X_{n_k}(t),\bar X(t),t\in[-h,+\infty)$, заданные на $(\bar\Omega,\bar F,\bar P)$, такие, что $P^{\bar X_{n_k}}=P^{X_{n_k}}$, $\bar X_{n_k}(t)\underset{n\to\infty}{\to}\bar X(t)$ равномерно на каждом отрезке из R_+ п. н. Пусть $\bar F_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\left(\bar X(s),s\le t+\varepsilon\right)$. Используя леммы 2, 3 и схему доказательства теоремы 2.6.1 [4], можно показать, что $\bar X(t)$ – слабое решение уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть функции* $f(t,X,\varphi),\ g(t,X,\varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены, компоненты функций* $f(t,X,\varphi),\ \ \sigma(t,X,\varphi)=g(t,X,\varphi)g^T(t,X,\varphi)$ *удовлетворяют условию A. Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(C([-h,0]\to R^d),B(C([-h,0]\to R^d)))$ *уравнение* (1) *имеет слабое решение с начальным распределением* ν.

Доказательство. По лемме 4 для любого натурального n уравнение $dX(t)=f_n(t,X(t),X_t)dt+g_n(t,X(t),X_t)dW(t)$ имеет слабое решение $X_n(t),t\in[-h,+\infty)$, с начальным распределением ν. Определим $\tau_n^m=\inf\left\{t\ge 0\,\middle|\,\|X_n(t)\|>m\right\}$, $X_n^m(t)=X_n(t\wedge\tau_n^m)$, $\psi_n=\left(X_n^m,\tau_n^m\right)_{m=1}^\infty$, $n=1,2,\dots$. Введем метрику ρ в $C\left([-h,+\infty)\to R^d\right)$ и метрику D в $\left(\left(C\left([-h,+\infty)\to R^d\right),\ [0,+\infty]\right)\times\dots\right.$ $\left.\times\left(C([-h,+\infty)\to R^d),[0,+\infty]\right)\times\dots\right)$ следующим образом:

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\left(\sup_{t\in[-h,n]}\|x(t)-y(t)\|\wedge 1\right),$$

$$D\left(\left(\left(x^1,\xi^1\right)\dots\left(x^m,\xi^m\right)\dots\right),\left(\left(y^1,\eta^1\right)\dots\left(y^m,\eta^m\right)\dots\right)\right)=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^{m+1}}\left(\rho\left(x^m,y^m\right)+\left|\frac{\xi^m}{1+\xi^m}-\frac{\eta^m}{1+\eta^m}\right|\right).$$

При каждом натуральном m для процессов $X_n^m(t),\ t\ge -h,$ выполняются условия (3) и (4). Поэтому для любого натурального m последовательность $X_n^m,\ n\ge 1,$ плотна в пространстве $C([-h,+\infty)\to R^d)$. Последовательность $\psi_n,\ n\ge 1,$ плотна в пространстве $((C([-h,+\infty)\to R^d),\ [0,+\infty])\times\dots\times(C([-h,+\infty)\to R^d),\ [0,+\infty])\times\dots)$ (лемма 3 [3]). Для последовательности $\psi_n,\ n\ge 1,$ выполнены условия теоремы I.2.7 [2], из доказательства которой вытекает, что можно выбрать подпоследовательность n_k последовательности n (для упрощения обозначений вместо n_k будем писать n) и можно построить процессы $\varepsilon_n=\left(\left(z_n^1,\eta_n^1\right),\dots,\left(z_n^m,\eta_n^m\right),\dots\right)$ и $\varepsilon=\left(\left(z^1,\eta^1\right),\dots,\left(z^m,\eta^m\right),\dots\right)$ на некотором вероятностном пространстве $\left(\Omega,F,P\right)$ так, что процессы $z_n^m(t),z^m(t)$ будут являться непрерывными, $P^{\varepsilon_n}=P^{\psi_n}$, $z_n^m(t)\underset{n\to\infty}{\to}z^m(t)$ равномерно на каждом отрезке из R_+ п. н., $\eta_n^m\underset{n\to\infty}{\to}\eta^m$ п. н. Кроме того, $z^m(t)=z^{m+1}(t)$ при $t<\eta^m$, $\eta^m<\eta^{m+1}$ п. н. Пусть $e=\lim_{m\to\infty}\eta^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t)=z^m(t)$ для $t\le\eta^m$, $\eta^m<\infty$, $z(t)=z^m(t)$ для

$t<\eta^m$, $\eta^m=\infty$, $z(t)=0$ при $t\geq e$. Обозначим $\sigma_{t+\varepsilon}$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s),\ -h\leq s\leq t+\varepsilon,\ m\geq 1$. Пусть $F_t=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\sigma_{t+\varepsilon}$, тогда процесс $z(t)1_{[-h,e)}(t)$ $\left(F_t\right)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t<e$. Кроме того, e является $\left(F_t\right)$-моментом остановки и $\varlimsup\limits_{t\uparrow e}\|z(t)\|=\infty$, если $e<\infty$.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1 [3] и используя при этом следствия 1, 2 и лемму 3, можно показать, что на расширении $\left(\hat{\Omega},\hat{F},\hat{P},\hat{F}_t\right)$ вероятностного пространства $\left(\Omega,F,P,F_t\right)$ можно определить $\left(\hat{F}_t\right)$-броуновское движение $\hat{W}(t)$, $\hat{W}(0)=0$ п. н. так, что с вероятностью 1 для любого $t\in[-h,e)$

$$z(t)=\begin{cases}\psi(t),\ t\in[-h,0],\\ \psi(0)+\int\limits_0^t f(s,z(s),z_s)ds+\int\limits_0^t g(s,z(s),z_s)d\hat{W}(s),\ t\geq 0,\end{cases}$$

процесс $\psi(t)$, $t\in[-h,0]$, имеет распределение ν. Поэтому $z(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай, когда компоненты матриц f,σ не удовлетворяют условию A. Пусть матричная функция $\psi=\left(\psi^{ij}\left(t,x_1,\ldots,x_d,\varphi\right)\right)$, $\left(t,X,\varphi\right)\in R_+\times R^d\times C([-h,0]\to R^d)$, $i=1,\ldots,\ d,j=1,\ldots,r$, непрерывна по φ при каждых фиксированных $\left(t,X\right)\in R_+\times R^d$. Разобьем множество всех индексов $\left\{(i,j)\middle|i=1,\ldots,d,j=1,\ldots,r\right\}$ функции ψ на непересекающиеся подмножества $I_\psi^1,\ldots,I_\psi^n$ следующим образом: индексы $\left(i_1,j_1\right)$, $\left(i_2,j_2\right)$ относим в одно подмножество I_ψ^j лишь в том случае, когда функции $\psi^{i_1j_1}$, $\psi^{i_2j_2}$ непрерывны по одним и тем же переменным $\left(x_{\alpha^j_{m_j+1}},\ldots,x_{\alpha^j_d},\varphi\right)$ при каждых фиксированных $\left(t,x_{\alpha^j_1},\ldots,x_{\alpha^j_{m_j}}\right)$. Если компоненты функции ψ с индексами из $I_\psi^j,j\in\{1,\ldots,n\}$ непрерывны по переменным $(x_{\alpha^j_{m_j+1}},\ldots,x_{\alpha^j_d},\varphi)$ при каждых фиксированных $\left(t,x_{\alpha^j_1},\ldots,x_{\alpha^j_{m_j}}\right)$, то выберем строки $g_{\beta^j_1},\ldots,g_{\beta^j_{l_j}}$ матрицы g таким образом, что $\left\{\alpha^j_1,\ldots,\alpha^j_{m_j}\right\}\subseteq\left\{\beta^j_1,\ldots,\beta^j_{l_j}\right\}$. Найдем множество $H\left(\beta^j_1,\ldots,\beta^j_{l_j}\right)$ и построим $(d\times r)$-матрицу ψ_j с компонентами $\psi_j^{i_1i_2}=\begin{cases}\psi^{i_1i_2},(i_1,i_2)\in I_\psi^j,\\ 0,(i_1,i_2)\notin I_\psi^j.\end{cases}$ Пусть $\psi_j(t,X,\varphi)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее точки $\psi_j(t,X,\varphi)$ и все предельные точки $\psi_j(t,X',\varphi)$ при $X'\to X$. Построим многозначные отображения $\Psi_j^0:R_+\times R^d\times C([-h,0]\to R^d)\to cl\left(R^{d\times r}\right)$, $\Psi_0:R_+\times R^d\times C([-h,0]\to R^d)\to cl\left(R^{d\times r}\right)$ следующим образом:

$$\psi_j^0(t,X,\varphi)=\begin{cases}\psi_j(t,X,\varphi),\ (t,x_{\beta^j_1},\ldots,x_{\beta^j_{l_j}})\notin H\left(\beta^j_1,\ldots,\beta^j_{l_j}\right),\\ \Psi_j(t,X,\varphi),\ (t,x_{\beta^j_1},\ldots,x_{\beta^j_{l_j}})\in H\left(\beta^j_1,\ldots,\beta^j_{l_j}\right),\end{cases}$$

$\psi_0=\psi_1^0+\psi_2^0+\ldots+\psi_n^0$ (под суммой множества $A\subset R$ и нуля понимаем множество A).

По указанному правилу для функций $f(t,X,\varphi)$, $\sigma(t,X,\varphi)$ построим соответственно отображения $F_0(t,X,\varphi)$, $A_0(t,X,\varphi)$.

Определение 2. Под β-слабым решением уравнения (1) с начальным распределением $\nu \in \wp$ будем понимать процесс $X(t)$, $t \in [-h, +\infty)$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) с потоком σ-алгебр F_t, такой, что:

1) существует (F_t)-момент остановки e такой, что процесс $X(t)1_{[-h,e)}(t)$ (F_t)-согласован, имеет непрерывные траектории при $t < e$ п. н. и $\overline{\lim_{t\uparrow e}}\|X(t)\| = \infty$, если $e < \infty$;

2) существует (F_t)-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

3) существуют измеримые (F_t)-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t \in [0, +\infty)$, принадлежащие соответственно пространствам $L_1^{\text{loc}}, L_2^{\text{loc}}$, такие, что для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \varpi) \in R_+ \times \Omega$

$$v(t)1_{[0,e)}(t) \in F_0(t, X(t), X_t)1_{[0,e)}(t), \;\; u(t)u^T(t)1_{[0,e)}(t) \in A_0(t, X(t), X_t)1_{[0,e)}(t);$$

4) с вероятностью 1 для всех $t \in [-h, e)$

$$X(t) = \begin{cases} \psi(t), t \in [-h, 0], \\ \psi(0) + \int\limits_0^t v(s)ds + \int\limits_0^t u(s)dW(s), \;\; t \geq 0, \end{cases}$$

процесс $\psi(t)$, $t \in [-h, 0]$, имеет распределение ν.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ *измеримы по Борелю, локально ограничены и непрерывны по* φ. *Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(C([-h,0] \to R^d),\ B(C([-h,0] \to R^d)))$ *уравнение* (1) *имеет* β-*слабое решение с начальным распределением* ν.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 из работы [5].

Пример 1.

$$\begin{cases} dx_1(t) = (k(x_1(t)) + tx_1^2(t) + x_1(t-1))dt + k(x_2(t))dW_1(t), \\ dx_2(t) = (k(x_2(t)+1) + \int\limits_{-1}^{0} x_1(t+\tau)d\tau)dt + x_2(t)dW_1(t), \end{cases} \quad \text{где } k(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Для функций f, σ выполняется условие A. По теореме 1 для любой заданной вероятности ν на $(C([-1,0] \to R^d), B(C([-1,0] \to R^d)))$ система имеет слабое решение с начальным распределением ν.

Пример 2.

$$\begin{cases} dx_1(t) = (k(x_1(t)) + tx_1^2(t) + x_1(t-1))dt + k(x_2(t))dW_1(t), \\ dx_2(t) = (k(x_2(t)) + x_1(t-1) + x_2(t-1))dt + x_2(t)dW_1(t), \end{cases} \quad \text{где } k(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Для этой системы условие A не выполняется. По теореме 2 для любой заданной вероятности ν на $(C([-1,0] \to R^d),\ B(C([-1,0] \to R^d)))$ система имеет β-слабое решение с начальным распределением ν. Для рассматриваемой системы $A_0 = \sigma$; $F_0 = f$, если $x_2 \neq 0$, $F_0(t, x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} k(x_1) + tx_1^2 + \varphi_1 \\ [-1 + \varphi_2, 1 + \varphi_2] \end{pmatrix}$, если $x_2 = 0$, где $\varphi_1(t) = x_1(t-1)$, $\varphi_2(t) = x_1(t-1) + x_2(t-1)$.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, доценту кафедры высшей математики А.А. Левакову за помощь в подготовке статьи.

1. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, 1989.
2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
3. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1029.
4. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
5. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 10. С. 1324.

Поступила в редакцию 28.03.07.

Максим Михайлович Васьковский – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики.