УДК 517.944

А.Г. АЛЕХНО

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С НЕОПРЕДЕЛЕННО БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

The conditions of solvability of boundary Riemann problem are obtaned. Common solution of boundary Riemann problem is built.

В комплексной плоскости дан контур L, состоящий из двух уходящих в бесконечность лучей $L_j = \{\arg z = \beta_j\}$, $0 = \beta_1 < \beta_2 = \beta < 2\pi$. Обозначим $D_j = \{\beta_j < \arg z < \beta_{j+1}\}$, $j = 1, 2$, $\beta_3 = 2\pi$.

Решена краевая задача Римана [1, с. 106], заключающаяся в отыскании всех ограниченных кусочно-аналитических функций с линией скачков L, непрерывные граничные значения которых удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in L. \tag{1}$$

Заданные коэффициенты $G(t)$, $g(t)$ подчинены условиям:

$$\begin{gathered} 1)\ G(t) = \exp\left\{2\pi i \varphi_j(t)|t|^\rho\right\},\ \varphi_j : L_j \to R,\ \varphi_j \in H(\mu_j), \\ \mu_j \ge \rho(\rho+1)^{-1},\ \varphi_j(\infty) = \lambda_j \ne 0,\ 0 < \rho < \frac{1}{2},\ j = 1, 2; \end{gathered} \tag{2}$$

$$2)\ g \in H,\ g(\infty) = 0. \tag{3}$$

Из (2) следует, что коэффициент $G(t)$ задачи имеет на каждом из лучей L_j бесконечный индекс порядка ρ с коэффициентом завихрения λ_j [2, с. 113]. Условия разрешимости однородной задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),\ t \in L, \tag{4}$$

для полуплоскости $(\beta = \pi)$ с коэффициентом (2) получены М.Э. Толочко [3], а для угловой области – автором данной статьи [4]. Неоднородная задача Римана (1) – (3) для полуплоскости с плюс-бесконечным и минус-бесконечным индексами, когда $\lambda_1\lambda_2 > 0$, решена в [5], а для произвольного β – другим методом, восходящим к [2, с. 123–130], – в [6]. В настоящей работе исследована задача с неопределенно бесконечным индексом, когда $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Для упрощения формулировок будем считать, что

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \beta \in (0, \pi]. \tag{5}$$

Рассмотрим сначала однородную задачу (4). Из [3], [4] следует, что необходимым условием ее разрешимости в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций является выполнение неравенства $\rho < \frac{1}{2}$.

Мы считаем его выполненным и каноническую функцию введем по формуле

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau - z)}\right\}. \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть справедливы условия (2), (5) и $\mu_j > \rho$. Обозначим $\alpha = \rho^{-1}\arccos\left(\lambda_1|\lambda_2|^{-1}\cos\rho\pi\right)$, если $\lambda_1|\lambda_2|^{-1}\cos\rho\pi \le 1$.

а) Однородная задача имеет бесконечное множество ограниченных решений, если

$$|\lambda_2| < \lambda_1\cos\rho\pi \ \text{ или } \ \lambda_1\cos\rho\pi < |\lambda_2| < \lambda_1 \ \text{ и } \ \beta \in (0, \pi - \alpha). \tag{7}$$

б) В случае $\lambda_1\cos\rho\pi \le |\lambda_2| < \lambda_1$ и $\beta = \pi - \alpha$ задача имеет единственное ограниченное решение.

в) Если $|\lambda_2| \ge \lambda_1$ или $\lambda_1\cos\rho\pi < |\lambda_2| < \lambda_1$ и $\beta \in (\pi - \alpha, \pi]$, то задача неразрешима в классе B.

Если задача разрешима, то ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \tag{8}$$

где $X(z)$ – каноническая функция и в случае а) $F(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho_F \le \rho$, подчиненная асимптотическому соотношению

$$\ln|F(t)| < \pi\sin^{-1}\rho\pi\left(\lambda_1\cos\rho\pi + \lambda_2\cos\rho(\pi - \beta)\right)t^\rho + O(1),\ t \in L_1, \tag{9}$$

а в случае б) – $F(z) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Преобразуем каноническую функцию рассматриваемой задачи к виду

$$\ln X(z) = \lambda_1 z\int_{L_1}\frac{\tau^\rho d\tau}{\tau(\tau - z)} + \lambda_2 z\int_{L_2}\frac{|\tau|^\rho d\tau}{\tau(\tau - z)} + z\int_{L_1}\frac{(\varphi_1(\tau) - \lambda_1)\tau^\rho d\tau}{\tau(\tau - z)} + z\int_{L_2}\frac{(\varphi_2(\tau) - \lambda_2)|\tau|^\rho d\tau}{\tau(\tau - z)} \equiv (I_1 + \ldots I_4)(z). \tag{10}$$

Интегралы $I_1(z)$, $I_2(z)$ легко вычисляются с помощью теоремы о вычетах [7, с. 245]

$$I_j(z) = -\frac{\pi\lambda_j e^{-i\rho\pi}}{\sin\rho\pi} z^{\rho},\ \beta_j < \arg z < \beta_j + 2\pi,\ \ j = 1, 2.$$

Поскольку $\varphi_j(\tau) \in H(\mu_j),\ \mu_j > \rho,\ \varphi_j(\infty) = \lambda_j,$ то плотности $\psi_j(\tau) = (\varphi_j(\tau) - \lambda_j)|\tau|^{\rho}$ интегралов типа Коши $I_3,\ I_4$ удовлетворяют условиям $\psi_j(\tau) \in H,\ \psi_j(\infty) = 0,$ и поэтому согласно [8, с. 53] функции $I_3(z),\ I_4(z)$ являются ограниченными, т. е. $|\Phi_k(z)| = O(1),\ k = 3, 4.$ Поэтому из (10) получаем представление $X(z) = \exp\{a_j z^{\rho}\}\omega_0(z),$ где

$$a_j = \begin{cases} -\pi\sin^{-1}(\rho\pi)e^{-i\rho\pi}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\rho(2\pi-\beta)}\right), 0 \le \theta \le \beta, \\ -\pi\sin^{-1}(\rho\pi)e^{-i\rho\pi}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{-i\rho\beta}\right), \beta \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$$

а кусочно-аналитическая функция $\omega_0(z)$ удовлетворяет соотношению

$$0 < C_1 < |\omega_0(z)| < C_2 < \infty.$$

Отсюда имеем равенство

$$|X(re^{i\theta})| = \exp\{h_X(\theta)r^{\rho}\}|\omega_0(re^{i\theta})|, \tag{11}$$

в котором индикатор $h_X(\theta)$ канонической функции задается формулой

$$h_X(\theta) = \begin{cases} -\pi\sin^{-1}\rho\pi\left(\lambda_1\cos\rho(\theta-\pi) + \lambda_2\cos\rho(\theta-\beta+\pi)\right),\ 0 \le \theta \le \beta, \\ -\pi\sin^{-1}\rho\pi\left(\lambda_1\cos\rho(\theta-\pi) + \lambda_2\cos\rho(\theta-\beta-\pi)\right),\ \beta \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Так как $\lambda_2 < 0,$ то $h_X(\theta)$ является тригонометрически ρ-выпуклой функцией на отрезке $[0, 2\pi].$ Поэтому соотношение $h_X(\theta) \le 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$ будет следствием неравенства

$$h_X(0) = h_X(2\pi) = -\pi\sin^{-1}\rho\pi\left(\lambda_1\cos\rho\pi + \lambda_2\cos(\pi-\beta)\right) \le 0.$$

Если выполнены условия а) теоремы, то, как легко видеть, будет $h_X(0) < 0$ и, следовательно, $h_X(\theta) < 0,\ \ \theta \in [0, 2\pi].$ Это означает, что решением задачи является любая функция вида (8), где $F(z) -$ целая функция порядка $\rho_F < \rho.$

Если верны соотношения б), то $h_X(0) = 0$ и $h_X(\theta) < 0$ при $\theta \in (0, 2\pi).$ Значит, $X(re^{i\theta})$ имеет экспоненциальное убывание порядка $\rho < \frac{1}{2}$ при любых значениях $\theta \ne 0,$ а при $\theta = 0$ в силу (11) будет $0 < C_1 < |X(r)| < C_2.$ Поскольку $F(z) = \text{const}$ – единственная целая функция порядка $\rho_F < \frac{1}{2},$ не возрастающая на бесконечности по любому лучу, то отсюда следует единственность решения задачи в рассматриваемом случае.

Если справедливы условия в), то $h_X(0) > 0.$ Значит, каноническая функция неограничена на луче $L_1.$ Поэтому $F(z) \equiv 0$ и задача не имеет ограниченных решений.

Общее решение задачи получаем методом [2, с. 120], причем неравенство (9) является следствием соотношения (11). Теорема доказана.

Теорема 1 устанавливает зависимость разрешимости однородной задачи Римана от величины угла β в узловой точке контура $L,$ которая в случае конечного индекса не имеет места. В ней указан также класс задач Римана с бесконечным индексом, имеющих единственное ограниченное решение.

Исследуем теперь неоднородную задачу Римана с неопределенно бесконечным индексом, когда выполнены соотношения (5). В этом случае соответствующая однородная задача может как иметь ограниченные решения, если справедливы условия а), б) теоремы 1, так и не иметь их, если выполнены условия в) этой теоремы. Получим сначала достаточные условия разрешимости неоднородной задачи в общем случае без учета того, разрешима или нет соответствующая однородная задача.

Построим мероморфную функцию $\Psi_0(z)$ по формуле

$$\Psi_0(z)=\Psi_{0,1}(z)\Psi_{0,2}(z), \tag{12}$$

где $\Psi_{0,1}(z)$ – аналитическая в области $\mathbb{C}\setminus L_1$ функция, которая определяется соотношением

$$\Psi_{0,1}(z)=\exp\left(\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\ln G(\tau)-2\pi i n_1(|\tau|)}{\tau(\tau-z)}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zz_{1,n}^{-1}\right)\left(1-zr_{1,n}^{-1}\right)^{-1}, \tag{13}$$

а $\Psi_{0,2}(z)$ – мероморфная в $\mathbb{C}\setminus L_2$ функция, которая задается равенством

$$\Psi_{0,2}(z)=\exp\left(\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\ln G(\tau)+2\pi i n_2(|\tau|)}{\tau(\tau-z)}d\tau\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zr_{2,n}^{-1}e^{-i\beta_2}\right)\left(1-zz_{2,n}^{-1}\right)^{-1}, \tag{14}$$

где $z_{j,n}$ определяются равенствами

$$z_{j,n}=r_{j,n}\exp\left(ir_{j,n}^{-\rho}+i\beta_j\right),\quad j=1,2, \tag{15}$$

в которых $r_{j,n}$ являются точками разрыва функций $n_j(x)=\left[\max\limits_{0\le t\le x}\left(\left|\varphi_j\left(te^{i\beta_j}\right)t^{\rho}\right|+\frac{1}{2}\right)\right]$.

Лемма 1. Функция $\Psi_{0,1}(z)$, заданная формулой (13), является решением однородной задачи (4) и удовлетворяет при $j=1$ условию

$$g_{0,j}(t)\equiv g(t)\left(\Psi_{0,j}^{+}(t)\right)^{-1}\in H_L,\ g_0(\infty)=0. \tag{16}$$

Доказательство. Функция $\Psi_{0,1}(z)$, построенная в [2, с. 186], является ограниченным решением однородной задачи с плюс-бесконечным индексом на луче L_1, удовлетворяющим на L_1 условию (16).

Пусть теперь $t\in L_2$. Как указано в [2, с. 188], для функции $\Psi_{0,1}(t)$ вне объединения кругов $K_{j,n}=\left\{\left|z-z_{j,n}\right|<Cr_{j,n}^{1-\rho}\right\}$ выполняется при $j=1$ неравенство

$$\left|\ln\left|\Psi_{0,j}(z)\right|\right|<C_1. \tag{17}$$

Так как для достаточно больших n указанные круги не пересекаются с лучом L_2, то при больших $t\in L_2$ будет

$$0<C_2^{-1}<\left|\Psi_{0,j}^{-1}(t)\right|<C_2<\infty. \tag{18}$$

Из последнего неравенства и аналитичности $\Psi_{0,1}(t)$ вытекает справедливость первого соотношения (16) на любом интервале луча L_2. Из этого же неравенства и условий (3) на функцию $g(t)$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}g_{0,j}(t)=0$ и $g_{0,j}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера в бесконечно удаленной точке. Лемма доказана.

Лемма 2. Функция $\Psi_{0,2}(z)$, заданная равенством (14), обладает следующими свойствами:

1) $\Psi_{0,2}(z)$ – мероморфная и не обращающаяся в нуль области $\mathbb{C}\setminus L_2$ функция, удовлетворяющая однородному краевому условию (4);

2) граничные значения $\Psi_{0,2}^{\pm}(t)$, $t\in L$, ограничены и для них выполнено при $j=2$ соотношение (16);

3) на границах всех секторов

$D_{j,n}^{*}=\left\{z\in\mathbb{C}\mid 2^{-1}\left(\beta_{j-1}+\beta_j\right)<\arg z<2^{-1}\left(\beta_j+\beta_{j+1}\right),\ |z|<2^{-1}\left(r_{j,n}+r_{j,n+1}\right)\right\}$, $j=1,2$, $n\in N$, функция $\psi_{0,2}(z)$ равномерно ограничена сверху и снизу, т. е. $\max\limits_{z\in\partial D_{j,n}^{*}}\left|\ln\left|\Psi_{0,2}(z)\right|\right|<C_3$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную однородную задачу Римана

$$\Psi^+(t) = G^{-1}(t)\Psi^-(t),\ t \in L_2,$$

с коэффициентом $G^{-1}(t)$, имеющим плюс-бесконечный индекс. Тогда функция $\Psi(z) = \Psi_{0,2}^{-1}(z)$ согласно [2, с. 186] будет ограниченным решением этой задачи. Отсюда вытекает свойство 1) леммы.

Свойство 2) является следствием при $j = 2$ соотношений (18), установленных для функции $\Psi_{0,2}^{-1}(z)$ так же, как при доказательстве леммы 1.

Свойство 3) для $\Psi_{0,2}(z)$ вытекает из доказанного в [2, с. 208] неравенства (18), имеющего место при $|z| = 2^{-1}\left(r_{j,n} + r_{j,n+1}\right)$, и из соотношений (17), справедливых, как видно из доказательства леммы 1, при $z \in \{\beta + \varepsilon \le \arg z \le 2\pi + \beta - \varepsilon\}$ и любом $\varepsilon \in (0, \pi)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Функция $\Psi_0(z)$, заданная равенством (12), удовлетворяет условию

$$g_0(t) \equiv g(t)\left(\Psi_0^+(t)\right)^{-1} \in H_L,\ g_0(\infty) = 0. \tag{19}$$

Утверждение леммы вытекает из лемм 1, 2.

Теорема 2. Для разрешимости в классе B неоднородной задачи Римана (1) – (3), (5) с неопределенно бесконечным индексом достаточно выполнения равенств

$$\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{\Psi_0^+(\tau)(\tau - z_{2,n})} = 0,\ n \in N, \tag{20}$$

в которых $z_{2,n}$ есть полюсы мероморфной функции $\psi_0(z)$, определенной формулой (12), которые задаются равенствами (15). При выполнении этих условий частное решение неоднородной задачи выражается формулой

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{\Psi_0^+(\tau)(\tau - z)} \equiv \Psi_0(z)\Gamma(z). \tag{21}$$

Доказательство. Так как функция $\Psi_0^+(t)$ в силу леммы 3 удовлетворяет условиям (19), то интеграл типа Коши $\Gamma(z)$ ограничен в каждой области D_j, $j = 1, 2$, причем $\Gamma(z) = o(1)$, $z \to \infty$. Так как выполнены условия (20), то функция $\Phi_0(z)$ аналитична в областях D_j, удовлетворяет неоднородному краевому условию (1) и в силу лемм 1, 2 ограничена в областях $D_j \cap \{|z| \le R\}$ при любом $R > 0$. В силу свойства 3 леммы 2 и условий $\Psi_{0,1}(z) \in B$, $\Gamma(z) \in B$ функция $\Phi_0(z)$ будет ограничена на границе всех секторов $D_j \cap D_{j,n}^*$ одной и той же постоянной, не зависящей от j и n. По принципу максимума модуля это означает, что $\Phi_0(z) \in B$. Теорема доказана.

При выполнении счетного множества условий (20) неоднородная задача Римана может иметь как бесконечное множество ограниченных решений, когда соответствующая однородная задача разрешима, так и единственное решение, когда задача (4) неразрешима. Рассмотрим оба эти случая.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (2), (3), (5), $\mu_j > \rho$, $\lambda_1 \cos\rho\pi \le |\lambda_2| < \lambda_1$. Обозначим $\alpha = \rho^{-1}\arccos\left(\lambda_1 |\lambda_2|^{-1}\cos\rho\pi\right)$.

Если $\beta \in (0, \pi - \alpha)$, то любое, отличное от тождественного нуля решение $\Psi(z)$ однородной задачи из класса B необходимо имеет экспоненциальное убывание на луче L_2, где справедлива оценка

$$|\psi(t)| \le \exp\left\{-k|t|^\rho + o\left(|t|^\rho\right)\right\},\ L_2 \ni t \to \infty,$$

причем коэффициент $k > 0$ определяется выбором конкретного решения $\Psi(z)$ и $k \in \left[-2\pi\lambda_2 \sin^{-1}(2\rho\pi)\sin\rho(2\pi - \beta)\sin\rho\beta,\ \pi\sin^{-1}(\rho\pi)\left(\lambda_1\cos\rho(\pi - \beta) + \lambda_2\cos\rho\pi\right)\right]$.

Доказательство. По теореме 1 однородная задача в рассматриваемом случае будет иметь бесконечное множество ограниченных решений, а индикатор $h_X(\theta)$ канонической функции отрицателен

для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Поэтому в случае $F(z) \equiv \tilde{N}$, $\tilde{N} \neq 0$, решение однородной задачи $\Psi(z) = X(z)F(z)$ будет иметь убывание с максимальным коэффициентом

$$k^* = -h_X(\beta) = \pi \sin^{-1}(\rho\pi)\left(\lambda_2 \cos\rho(\pi - \beta) + \lambda_2 \cos\rho\pi\right).$$

Убывание решения $\Psi(z) = X(z)F(z)$ будет с минимальным коэффициентом k_*, если решение соответствует целой функции $F(z)$, построенной по тригонометрическому индикатору

$$h_F(\theta) = |h_X(0)| \cos^{-1}(\rho\pi)\cos\rho(\theta - \pi), \ \theta \in [0, 2\pi], \tag{22}$$

удовлетворяющему равенству $h_X(0) + h_F(0) = 0$. При этом

$$k_* = -h_X(\beta_2) - h_F(\beta_2) = -2\pi\lambda_2 \sin^{-1}(2\rho\pi)\sin\rho(2\pi - \beta_2)\sin\rho\beta_2 > 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если частное решение неоднородной задачи искать в виде (21), где $\Psi_0(z)$ – ограниченное решение соответствующей однородной задачи, то для сходимости интеграла типа Коши в этой формуле необходимо, чтобы выполнялась оценка $|g(t)| \le \exp\left(-k_* |t|^\rho\right)$, $L_2 \ni t \to \infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 4, $\beta \in (0, \pi - \alpha)$ и

$$g(t) = \tilde{g}(t)\exp\left(-k_* |t|^\rho\right), \ t \in L_2, \ \tilde{g}(t) \in H_{L_2}, \ \tilde{g}(\infty) = 0. \tag{23}$$

Тогда неоднородная задача Римана с неопределенно бесконечным индексом имеет бесконечное множество ограниченных решений, представимых в виде $\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Psi(z)$, где $\Psi(z)$ – общее решение соответствующей однородной задачи, удовлетворяющее теореме 1, а $\Phi_0(z)$ – частное решение неоднородной задачи, которое задается формулой (21).

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что утверждение теоремы будет справедливо, если существует хотя бы одно ограниченное решение неоднородной задачи. Приведем пример такого решения, имеющего вид (21), где $\Psi_0(z) = X(z)F_0(z)$.

Для этого построим целую функцию $F_0(z)$, имеющую индикатор (22), со специально расположенными нулями, модули которых имеют плотность [9, с. 123] $\Delta = (2\pi\rho)^{-1}(h_F'(+0) - h_F'(2\pi - 0)) = $
$= \cos^{-1}(\rho\pi)(\lambda_1 \cos\rho\pi + \lambda_2 \cos\rho(\pi - \beta)) > 0.$

Зададим нули функции $F_0(z)$ равенствами

$$z_n = r_n \exp\left(i r_n^{-\rho}\right), \ r_n = \left(\frac{2n-1}{2\Delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \ n \in N. \tag{24}$$

При этом считающая функция последовательности $\{r_n\}$ определяется формулой $n(x) = \left[\Delta x^\rho + \frac{1}{2}\right]$, а для $F_0(z)$ справедливо представление

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - z z_n^{-1}\right). \tag{25}$$

Запишем теперь частное решение однородной задачи в виде

$$\Psi_0(z) = X(z)F_0(z) = X(z)\exp\left\{-z\int_0^\infty \frac{\Delta x^\rho dx}{x(x-z)}\right\} \times$$

$$\times\left(\exp\left\{z\int_0^\infty \frac{\Delta x^\rho - n(x)}{x(x-z)}dx\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)^{-1}\right) \equiv X(z)X_0(z)\tilde{\Psi}(z). \tag{26}$$

Асимптотическое представление канонической функции, полученное при доказательстве теоремы 1, дается формулой (11), значение $X_0(z)$ вычисляется точно с помощью теории вычетов [7, с. 112], а свойства функции $\tilde{\psi}(z)$ установлены в лемме 1. Поэтому из представления (26) имеем

$$\Psi_0\left(re^{i\theta}\right)=\exp\left\{\left(h_X\left(\theta\right)+h_{F_0}\left(\theta\right)\right)r^{\rho}\right\}\omega_0\left(z\right),\ \ C^{-1}<\left|\omega_0\left(z\right)\right|<C$$

и

$$\Psi_0\left(t\right)=\begin{cases}\omega_0^+\left(t\right), & t\in L_1,\\ \exp\left(-k_*\left|t\right|^{\rho}\right)\omega_0^+\left(t\right), & t\in L_2,\end{cases}$$

причем $\omega_0^+\left(t\right),\ t\in L,$ удовлетворяет условиям вида (19).

Из первого равенства в силу соотношения $h_X\left(\theta\right)+h_F\left(\theta\right)\le 0,\ \ \theta\in\left[0,2\pi\right],$ следует ограниченность построенного решения $\Psi_0\left(z\right)$ однородной задачи. Из второго равенства в силу условий (23) на функцию $g\left(t\right)$ вытекает, что $\Psi_0\left(z\right)$ удовлетворяет условиям (19) леммы 3. На основании ее заключаем, что функция $\Phi_0\left(z\right)$ из формулы (21), где $\Psi_0\left(z\right)$ имеет вид (26), является ограниченным решением неоднородной задачи. Теорема доказана.

С помощью построенной функции $F_0\left(z\right)$ можно исследовать неоднородную задачу при выполнении условий б) и в) теоремы 1.

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 4, $\beta\in\left(\pi-\alpha,\pi\right]$ и справедливы соотношения (23).

Тогда неоднородная задача Римана с неопределенно бесконечным индексом разрешима в классе B тогда и только тогда, когда выполнены равенства (20), в которых $z_{2,n}=z_n$ определяются соотношениями (24), а мероморфная функция $\Psi_0\left(z\right)$ имеет вид

$$\Psi_0\left(z\right)=X\left(z\right)F_0^{-1}\left(z\right)=X\left(z\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zz_n^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

При выполнении (20) единственное решение неоднородной задачи дается формулой (21).

Достаточность теоремы доказывается аналогично теореме 2 на основе свойств целой функции $F_0\left(z\right)$ из формулы (25), установленных при доказательстве теоремы 3. Необходимость выводится методом, изложенным в [2, с. 213], причем существенным является то обстоятельство, что функция $\Psi_0\left(z\right)$ не имеет нулей.

Теорема 5. Пусть имеют место условия леммы 4, $\beta=\pi-\alpha$ и выполнены соотношения (23), где $k_*=-h_X\left(\beta\right)=\pi\operatorname{ctg}(\rho\pi)\left|\lambda_2\right|^{-1}\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)>0.$

Тогда неоднородная задача Римана с неопределенно бесконечным индексом безусловно разрешима в классе $B,$ множество ее решений зависит от произвольной комплексной постоянной C и дается формулой

$$\Phi\left(z\right)=\frac{X\left(z\right)}{2\pi i}\int_L\frac{g\left(\tau\right)d\tau}{X^+\left(\tau\right)\left(\tau-z\right)}+CX\left(z\right),$$

где $X\left(z\right)$ – каноническая функция задачи.

Теорема вытекает из теоремы 1 и установленных в ней свойств канонической функции.

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986.
3. Толочко М.Э. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1972. № 5. С. 34.
4. Алехно А.Г. // Докл. НАН Беларуси. 1997. Т. 41. № 2. С. 37.
5. Толочко М.Э. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1971. № 3. С. 31.
6. Алехно А.Г. // Докл. НАН Беларуси. 1997. Т. 41. № 5. С. 35.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин И.М. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
9. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.

Поступила в редакцию 05.04.07.

Александр Григорьевич Алехно – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории функций.