УДК 517.925.41

Д.Н. ЧЕРГИНЕЦ

ФУНКЦИЯ СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПРОСТЫМ СЕДЛОМ

The method of building asymptotic expansion of transition map is obtained for analytic planar differential system with prime saddle for equation in polar coordinates. Necessary center conditions are found for the origin of a system of differential equations.

Рассмотрим вещественную аналитическую в окрестности начала координат систему дифференциальных уравнений с монодромной особой точкой $O(0,0)$

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=n}^{\infty}p_{i,j}x^iy^j,\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=n}^{\infty}q_{i,j}x^iy^j,\quad n\in\mathrm{N}. \tag{1}$$

Исключая время в системе (1) и переходя к полярным координатам, получаем

$$\frac{dr}{d\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\varphi)r^k\Big/\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(\varphi)r^k, \tag{2}$$

где P_k,Q_k – однородные тригонометрические полиномы.

Если функция Q_0 отлична от нуля на R, то метод решения проблемы центра и фокуса в этом случае известен [1]. В данной работе мы будем считать, что функция Q_0 имеет нули. Пусть $Q_0(\frac{\pi}{2})=0$, тогда $Q_0(\varphi)=\Phi(\varphi)\cos^{m_1}\varphi$, $P_1(\varphi)=H(\varphi)\cos^{m_2}\varphi$, где H, Φ – тригонометрические многочлены. Далее будем считать, что: А) функция Φ не принимает нулевых значений на отрезке $[\alpha_0,\frac{\pi}{2}]$, где $0\le\alpha_0<\frac{\pi}{2}$.

Следуя [2], уравнение (2) перепишем в виде

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{H(\varphi)r\cos^{m_2}\varphi+\sum_{k,l}g_{k,l}(\varphi)r^l\cos^k\varphi}{\Phi(\varphi)\cos^{m_1}\varphi+\sum_{i,j}f_{i,j}(\varphi)r^j\cos^i\varphi}, \tag{3}$$

где $f_{i,j},g_{k,l}$ – тригонометрические полиномы, $f_{i,j}(\frac{\pi}{2})\ne0$, $g_{k,l}(\frac{\pi}{2})\ne0$. Функциям $g_{k,l}$ и $f_{i,j}$ поставим в соответствие точки $(k+1,l)$ и $(i,j+1)$. Φ сопоставим $(m_1,1)$, а H, если она отлична от нуля, $(m_2+1,1)$. Пусть $-\frac{p}{q}$ – угловой коэффициент наклонного ребра диаграммы Ньютона с вершиной $(\min\{m_1,m_2+1\},1)$.

Заменой переменных

$$\cos\varphi=\rho^p\cos^p\theta,\quad r=\rho^q\sin^q\theta,\qquad \varphi\in(\alpha_0,\frac{\pi}{2}],\theta\in(0,\frac{\pi}{2}], \tag{4}$$

уравнение (2) преобразуется к виду

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde P_k(\theta)\rho^k\Big/\sum_{k=0}^{\infty}\tilde Q_k(\theta)\rho^k, \tag{5}$$

где $\tilde P_k,\tilde Q_k$ – тригонометрические полиномы. Наряду с условием А) будем считать, что: Б) функция $\tilde Q_0$ из уравнения (5) отлична от нуля на $(0,\alpha_1]$, где $0<\alpha_1\le\frac{\pi}{2}$; В) выполнено одно из условий: 1) $m_1<m_2+1$; 2) $m_1=m_2+1$ и $pH(\frac{\pi}{2})+q\Phi(\frac{\pi}{2})>0$.

Пусть заданы две дуги. Γ_1: $\varphi=\alpha_0, r=c$, $c\in(0,c_0)$, Γ_2: $\varphi=\arccos(s^p\cos^p\alpha_1)$, $r=s^q\sin^q\alpha_1$, $s\in(0,s_0)$. Отметим, что дуга Γ_2 также определяется формулами $\theta=\alpha_1$, $\rho=s$, $s\in(0,s_0)$. Из монодромности начала координат следует, что в достаточно малой окрестности точки $O(0,0)$ траектория, пересекающая дугу Γ_1 в точке $(\varphi,r)=(\alpha_0,c_*)$, двигаясь против часовой стрелки, пересекает дугу Γ_2 в точке $(\varphi,r)=(\arccos(s_*^p\cos^p\alpha_1),s_*^q\sin^q\alpha_1)$. Таким образом, каждому достаточно малому c_* однозначно сопоставляется единственное $s_* = s(c_*)$, данное отображение будем называть *функцией соответствия* между дугами Γ_1, Γ_2 и обозначать $\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c)$.

Н.Б. Медведевой [3] доказано, что коэффициенты асимптотического разложения функции последования простейшего монодромного класса являются аналитическими функциями от коэффициентов системы. В данной работе приводится алгоритм, вычисляющий асимптотическое представление функции соответствия $\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c)$ системы (1), удовлетворяющей условиям А), Б), В). Данное разложение необходимо при построении функции последования монодромной особой точки [4].

Асимптотическое представление функции $r(\arccos c^{\beta}, \alpha_0, c)$. Выберем натуральное σ, удовлетворяющее неравенствам $i + \sigma j \geq m_1$, $k + \sigma(l-1) + 1 \geq m_1$ для всех k, l, i, j из (3). Тогда заменой $r = \tilde{r}\cos^{\sigma}\varphi$ уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{d\tilde{r}}{d\varphi} = (\gamma\,\mathrm{tg}\,\varphi + R_1(\varphi))\tilde{r} + \frac{1}{\cos\varphi}\sum_{k=2}^{\infty} R_k(\varphi)\tilde{r}^k, \tag{6}$$

где $\gamma = \sigma$, если $m_1 < m_2 + 1$, $\gamma = \sigma + H\left(\frac{\pi}{2}\right)/\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ при $m_1 = m_2 + 1$. Функции R_k являются рациональными функциями переменных $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и удовлетворяют оценке

$$\exists T > 0 \quad \forall k \in \mathrm{N} \quad \forall \varphi \in \left[\alpha_0,\ \frac{\pi}{2}\right] \qquad (|R_k(\varphi)| < T^k). \tag{7}$$

Решение уравнения (6) на промежутке $\varphi \in [\alpha_0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющее условию $\tilde{r}(\alpha_0) = c\cos^{-\sigma}\alpha_0$, будем находить из интеграла $\cos^{\gamma}\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k(\varphi)\left(\frac{\tilde{r}}{F(\varphi)}\right)^k = c\cos^{\gamma-\sigma}\alpha_0$, где

$$F(\varphi) = \exp\left(\int_{\alpha_0}^{\varphi} R_1(\varphi)d\varphi\right), \quad v_1(\varphi) = 1, \tag{8}$$

$$v_k(\varphi) = \cos^{\gamma(k-1)}\varphi\int_{\alpha_0}^{\varphi}\frac{-1}{\cos^{\gamma(k-1)+1}}\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)F^{j-1}(\tau)R_j(\tau)v_{k-j+1}(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Найдем оценки для v_k. С этой целью докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 1. Пусть $\gamma > 0$ *и* $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Тогда существует такое* $I > 0$, *что для всех натуральных k и* $\varphi \in [\varphi_0, \frac{\pi}{2})$ *справедливо неравенство* $\cos^{k\gamma}\varphi\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\tau}{\cos^{k\gamma+1}\tau} \leq \frac{I}{k}$.

Предложение доказывается исследованием функции на экстремум.

Лемма 1. *Для функций* v_k, *определенных формулой* (9), *справедлива оценка*

$$\exists V > 0 \quad \forall k \in \mathrm{N} \quad \forall \varphi \in [\alpha_0, \frac{\pi}{2}) \qquad (|v_k(\varphi)| \leq V^k). \tag{10}$$

Доказательство проводится методом математической индукции с использованием предложения 1 и неравенства (7).

Из соотношения $\sum_{i=1}^{\infty}v_i(\varphi)\left(\sum_{k=1}^{\infty}h_k(\varphi)c^k\right)^i = c$ методом неопределенных коэффициентов единственным образом последовательно находим функции h_k

$$h_1(\varphi) = 1,\ h_2(\varphi) = -v_2(\varphi),\ h_3(\varphi) = 2v_2^2(\varphi) - v_3(\varphi), \ldots, \tag{11}$$

причем h_k являются многочленами переменных $v_1(\varphi), v_2(\varphi), \ldots, v_k(\varphi)$, при k, большем единицы, $h_k(\alpha_0) = 0$. Из (10) следует существование такой константы $H > 0$, что для всех натуральных k и $\varphi \in \left[\alpha_0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$|h_k(\varphi)| \le H^k. \qquad (12)$$

Теорема 1. *Для решения уравнения* (2), *удовлетворяющего условию* $r(\alpha_0)=c$, *при достаточно малом с справедлива формула*

$$r(\arccos c^\beta, \alpha_0, c) = c^{\beta\sigma} F(\arccos c^\beta) \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\arccos c^\beta)(\cos^{\gamma-\sigma}\alpha_0\, c^{1-\beta\gamma})^k,$$

где $\beta \in (0, \frac{1}{\gamma})$, *функция F задана формулой* (8), *функции h_k определены* (11).

Доказательство следует из замены $r = \tilde{r}\cos^\sigma \varphi$ и оценок (10), (12).

Из неравенства (12) выводится асимптотическая формула

$$\sum_{k=m}^{\infty} h_k(\arccos c^\beta)(\cos^{\gamma-\sigma}\alpha_0\, c^{1-\beta\gamma})^k = O(c^{m(1-\beta\gamma)}), \qquad m \in \mathrm{N}.$$

Лемма 2. *Пусть функции* $v_k(\arccos u)$ *определяются формулами*

$$v_1(\arccos u) = 1, \quad v_k(\arccos u) = u^{(k-1)\gamma} \int_{\cos\alpha_0}^{u} f_{v,k}(\tau)d\tau, \quad k > 1,$$

где

$$f_{v,k}(u) = \frac{1}{u^{(k-1)\gamma+1}\sqrt{1-u^2}} \sum_{j=2}^{k} (k-j+1) F^{j-1}(\arccos u) R_j(\arccos u) v_{k-j+1}(\arccos u). \qquad (13)$$

Тогда функции $f_{v,k}(u)$ и $v_k(\arccos u)$ при $k>1$ в достаточно малой окрестности нуля раскладываются в абсолютно сходящиеся ряды

$$f_{v,k}(u) = \frac{1}{u^{(k-1)\gamma+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-2} a_{k,i,j,n} u^{i+j\gamma} \ln^n u, \qquad (14)$$

$$v_k(\arccos u) = -V_k(\cos\alpha_0) u^{(k-1)\gamma} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,i,j,n} u^{i+j\gamma} \ln^n u, \qquad (15)$$

где

$$V_k(u) = \frac{1}{u^{(k-1)\gamma}} \sum_{i=0}^{[(k-1)\gamma+1]} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,i,j,n} u^{i+j\gamma} \ln^n u +$$
$$+ \int_0^u \left(f_{v,k}(\tau) - \frac{1}{\tau^{(k-1)\gamma+1}} \sum_{i=0}^{[(k-1)\gamma+1]} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-2} a_{k,i,j,n} \tau^{i+j\gamma} \ln^n \tau \right) d\tau.$$

Причем при иррациональном γ в рядах отсутствуют слагаемые с логарифмом.

Доказательство проводится методом математической индукции с использованием теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Таким образом, получен алгоритм, позволяющий находить асимптотическое представление функции $r(\arccos c^\beta, \alpha_0, c)$ из теоремы 1 с точностью до слагаемых порядка $o(c^\lambda)$, $\lambda > 0$.

Алгоритм 1. Пусть $\lambda > 0$. Вычислим $\tilde{r}(\arccos c^\beta)$ с точностью $o(c^{\tilde{\lambda}})$, $\tilde{\lambda} := \lambda - \beta\sigma$.

1. Раскладываем по формуле Тейлора функцию $F(\arccos u)$ до степени $\left[\frac{\tilde{\lambda} - (1-\beta\gamma)}{\beta}\right]$.

2. Определяем количество функций v_k, необходимых для вычисления разложения $\tilde{r}(\arccos c^\beta)$, с точностью до $o(c^{\tilde{\lambda}})$, $m := \left[\frac{\tilde{\lambda}}{1-\beta\gamma}\right]$. Разложение $r(\arccos c^\beta, \alpha_0, c)$ будем вычислять при помощи формулы

$$r(\arccos c^\beta) = c^{\beta\sigma} F(\arccos c^\beta) \sum_{k=1}^{m} h_k(\arccos c^\beta)(\cos^{\gamma-\sigma}\alpha_0\, c^{1-\beta\gamma})^k + o(c^\lambda). \qquad (16)$$

3. Последовательно находим $v_k(\arccos u)$ с точностью $o(u^{\lambda_k})$, $\lambda_k := \frac{\tilde{\lambda} - k(1-\beta\gamma)}{\beta}$, $k = 2, 3, \ldots, m$:

а) $k := 2$;

б) раскладываем функцию $f_{v,k}$, определенную формулой (13), в ряд вида (14) с точностью до слагаемых порядка $o(u^{\lambda_k-(k-1)\gamma-1})$, причем вместо функций $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ берем уже полученные разложения;

в) интегрируя полученный в пункте б) ряд, находим разложение (15) функции $v_k(\arccos u)$ с точностью до слагаемых порядка $o(u^{\lambda_k})$;

г) если $k < m$, то увеличиваем k на единицу и переходим к пункту б), иначе заканчиваем вычисление функций $v_k(\arccos u)$ и переходим к пункту 4.

4. Подставляя в (16) вместо функций $F(\arccos c^{\beta})$, $v_k(\arccos c^{\beta})$, $k = 2,3,\ldots,m$, полученные выше разложения (меняя u на c^{β}), получаем асимптотическое разложение функции $r(\arccos c^{\beta})$ с точностью до слагаемых порядка $o(c^{\lambda})$:

$$r(\arccos c^{\beta}) = c^{1+\beta\sigma-\beta\gamma}\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^{\gamma-\sigma}\alpha_0 + P(c^{\beta}, c^{1-\beta\gamma}, c^{\beta\gamma}, c^{1-\beta\gamma}\ln c)\right) + o(c^{\lambda}), \tag{17}$$

где P – многочлен, при иррациональном γ не содержащий логарифма, $P(0,0,0,0) = 0$.

Асимптотическое представление функции $\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c)$. С учетом Б) уравнение (5) при $\varphi \in (0, \alpha_1]$ примет вид

$$\frac{dp}{d\theta} = (-\tilde{\gamma}\operatorname{ctg}\theta + G_1(\theta))\rho + \frac{1}{\sin\theta}\sum_{k=2}^{\infty} G_k(\theta)\rho^k, \tag{18}$$

где $\tilde{\gamma} = 1$, если $m_1 \le m_2$, $\tilde{\gamma} = q\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)/(q\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + pH\left(\frac{\pi}{2}\right)) > 0$, при $m_1 = m_2 + 1$. Решение уравнения (18), удовлетворяющее условию $\rho(\alpha_1) = s$, ищем, используя интеграл

$$\sin^{\tilde{\gamma}}\theta\sum_{k=1}^{\infty} w_k(\theta)\left(\frac{\rho}{F_2(\theta)}\right)^k = s\sin^{\tilde{\gamma}}\alpha_1,$$

здесь $F_2(\theta) = \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\theta} G_1(\tau)d\tau\right)$, $w_1(\theta) = 1$,

$$w_k(\theta) = \sin^{\tilde{\gamma}(k-1)}\theta\int_{\alpha_1}^{\theta}\frac{-1}{\sin^{\tilde{\gamma}(k-1)+1}\tau}\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)F_2^{j-1}(\tau)G_j(\tau)w_{k-j+1}(\tau)d\tau. \tag{19}$$

Для функций $w_k(\arcsin u)$ справедливы разложения, аналогичные разложениям (15) для функций $v_k(\arccos u)$. Опишем процесс вычисления асимптотического представления функции соответствия $\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c)$.

Алгоритм 2. 1. При помощи разложения (17) найдем ρ, $z := \sin\theta$ при $\varphi = \arccos c^{\beta}$

$$\rho = \sqrt{\cos^{2/p}\varphi + r^{2/q}} = c^{\beta/p} + c^{2\nu+\beta/p}P_{\rho}(c^{\nu}, c^{\beta}, c^{1-\beta\gamma}, c^{\beta\gamma}, c^{1-\beta\gamma}\ln c) + o(c^{\lambda_{\rho}}),$$

где $\nu := \frac{1}{q}(1 - \beta\gamma + \beta(\sigma - q/p)) > 0$, так как $\sigma - q/p \ge 0$, $\lambda_{\rho} := \lambda - (1 + \beta\sigma - \beta\gamma) + 2\nu + \frac{\beta}{p}$;

$$z = \frac{r^{1/q}}{\rho} = c^{\nu}(F^{1/q}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^{(\gamma-\sigma)/q}\alpha_0 + P_z(c^{\nu}, c^{\beta}, c^{1-\beta\gamma}, c^{\beta\gamma}, c^{1-\beta\gamma}\ln c)) + o(c^{\lambda_z}),$$

где $\lambda_z := \lambda - (1 + \beta\sigma - \beta\gamma) + \nu$.

2. Асимптотическое представление функции $\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c)$ с точностью $o(c^{\hat{\lambda}})$, $\hat{\lambda} := \lambda - (1 + \beta\sigma - \beta\gamma) + \nu\tilde{\gamma} + \frac{\beta}{p}$, найдем при помощи формулы

$$\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c) = z^{\tilde{\gamma}}\sum_{k=1}^{n_w} w_k(\arcsin z)\left(\frac{\rho}{F_2(\arcsin z)}\right)^k + o(c^{\hat{\lambda}}),\ n_w := \left[\frac{\tilde{\lambda} - \nu\tilde{\gamma}}{\beta/p}\right]. \tag{20}$$

3. Разложение $F_2^{-1}(\arcsin u)$ с точностью $\left[\dfrac{\tilde{\lambda} - \nu\tilde{\gamma} - \dfrac{\beta}{p}}{\nu}\right]$ находим по формуле Тейлора.

4. Разложения $w_k(\arcsin u)$ с точностью $o(u^{\lambda_k})$, $\lambda_k := \left[\dfrac{\tilde{\lambda} - \nu\tilde{\gamma} - k\beta/p}{\nu}\right]$, $k = 2,\ldots,n_w$, получаем таким же способом, каким находили разложения $v_k(\arccos u)$ в алгоритме 1.

5. Подставляя в (20) найденные разложения, получаем

$$\rho(\alpha_1, r, \alpha_0, c) = F^{\tilde{\gamma}/q}\left(\frac{\pi}{2}\right)F_2^{-1}(0)\cos^{\tilde{\gamma}(\gamma-\sigma)/q}\alpha_0 c^{\nu\tilde{\gamma}+\beta/p} + \ldots + o(c^{\hat{\lambda}}),$$

где $\nu\tilde{\gamma} + \dfrac{\beta}{p} = \dfrac{1}{q}$, если $m_1 \le m_2$, и $\nu\tilde{\gamma} + \dfrac{\beta}{p} = \Phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)/(q\Phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + pH\left(\dfrac{\pi}{2}\right))$, если $m_1 = m_2 + 1$.

Простейший монодромный класс. Рассмотрим вещественную аналитическую в окрестности нуля систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2 y - y^4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k, \\ \dot{y} &= y^4 \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k + xy^3 \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k + x^2 y\left(B + \sum_{k=1}^{\infty} g_k y^{2k}\right) + Cx^3. \end{aligned} \tag{21}$$

При выполнении условий

$$c_1 - a_0^2 > 0, \qquad 4C - B^2 > 0 \tag{22}$$

начало координат системы (21) является монодромной особой точкой [5]. В дальнейшем будем считать условия (22) выполненными. Используя алгоритмы 1, 2, вычислим функцию последования $r(2\pi, 0, c)$ системы (21) на луче $\varphi = 0$ с точностью $o(c^4)$.

В полярных координатах система (21) имеет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r\sin\varphi((C-1)\cos\varphi + B\sin\varphi)\cos^2\varphi + r^2 g(\varphi, r)}{(C\cos^2\varphi + B\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2\varphi + rf(\varphi, r)}, \tag{23}$$

где $m_1 = m_2 = 2$, поэтому условие B) выполнено, а из (22) следует, что в качестве α_0 можно взять $\alpha_0 = 0$ и требование A) также выполнено.

При помощи замены $r = \tilde{r}\cos\varphi$ уравнение (21) сводится к уравнению вида (6), где $\gamma = 1$. При помощи алгоритма 1 находим $r(\arccos c^\beta, 0, c)$ при $\beta = \dfrac{1}{2}$ с точностью $o(c^4)$

$$r(\arccos c^\beta, 0, c) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)(c - Bc^{1+\beta} + a_0 F\left(\frac{\pi}{2}\right)c^{2-\beta} + \ldots + o(c^4)).$$

По диаграмме Ньютона определяем числа $p = 1$, $q = 1$. При помощи замены (4) уравнение (23) преобразуется к уравнению (5), в котором функция $\tilde{Q}_0(\theta) = \cos^2\theta + 2a_0\cos\theta\sin\theta + c_1\sin^2\theta$. Из условий (22) следует, что $\tilde{Q}_0$ отлична от нуля на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и условие Б) выполняется. Применяя алгоритм 2, находим асимптотическое представление функции соответствия

$$r\left(\frac{\pi}{2}, 0, c\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)F_2^{-1}(0)c + (3Ba_0 - b_0)F^2\left(\frac{\pi}{2}\right)F_2^{-1}(0)c^2\ln c + \ldots + o(c^4).$$

Поступая во второй, третьей и четвертой четвертях аналогичным образом, имеем

$$r(2\pi, 0, c) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{i-1} k_{i,j} c^i \ln^j c + o(c^4),$$

где $k_{1,0} = e^{\frac{2\pi B}{\sqrt{4C-B^2}}}$. $k_{1,0}$ равен единице лишь в случае, когда $B=0$. Найдено первое необходимое условие центра начала координат системы (21). С учетом того, что $B=0$, получаем $k_{1,1} = 2b_0\sqrt{C}(e^{\frac{\pi a_0}{\sqrt{c_1-a_0^2}}}-1)$. Рассмотрим два возможных варианта:

1) $a_0 = 0$. Следующий коэффициент $k_{2,0} = \dfrac{2\pi a_1\sqrt{C}}{\sqrt{c_1}}$. Очередное условие центра $a_1 = 0$. После чего имеем $k_{3,2} = 0, k_{3,1} = 0, k_{3,0} = \dfrac{3}{4}\pi g_1\sqrt{C}$. Четвертое необходимое условие $g_1 = 0$. Далее, $k_{4,3} = 0, k_{4,2} = 0, k_{4,1} = -2\pi b_0 a_2 C^{3/2}/\sqrt{c_1}$. Возможны два варианта:

а) $a_2 = 0$. После чего $k_{4,0} = 2\pi a_3 C^{3/2}/\sqrt{c_1}$. Требуем, чтобы $a_3 = 0$;

б) $b_0 = 0$. В этом варианте $k_{4,0} = \pi(2a_3c_1 - a_2c_2)C^{3/2}/c_1^{3/2}$, поэтому $2a_3c_1 - a_2c_2 = 0$.

2) $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$. Выражение принимает вид $k_{2,0} = -\dfrac{2(3a_0^2a_1 + 4a_1c_1 - 2a_0c_2)\sqrt{C}}{a_0(3a_0^2 - 4c_1)} \times (e^{\frac{\pi a_0}{\sqrt{c_1-a_0^2}}}-1)$. Получили необходимое условие центра $3a_0^2a_1 + 4a_1c_1 - 2a_0c_2 = 0$. Рассмотрим следующие коэффициенты: $k_{3,2} = 0, k_{3,1} = 0$, $k_{3,0} = -\dfrac{3}{8}\pi(5Ca_1 - g_1)\sqrt{C}(e^{\frac{2\pi a_0}{\sqrt{c_1-a_0^2}}}+1)$. Требуем, чтобы $5Ca_1 - g_1 = 0$. Далее, $k_{4,3} = 0$, $k_{4,2} = 0$, $k_{4,1} = (7Ca_0a_1 + 2b_2 - 2Cc_2)\times\ C^{3/2}(e^{\frac{3\pi a_0}{\sqrt{c_1-a_0^2}}}-1)$. Для того чтобы начало координат было центром, необходимо $7Ca_0a_1 + 2b_2 - 2Cc_2 = 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$ *системы* (21) *являлась центром, необходимо выполнение хотя бы одной серии условий*: 1) $B=0$, $a_0=0$, $a_1=0$, $g_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$; 2) $B=0$, $a_0=0$, $a_1=0$, $g_1=0$, $b_0=0$, $2a_3c_1 - a_2c_2 = 0$; 3) $B=0$, $b_0=0$, $3a_0^2a_1 + 4a_1c_1 - 2a_0c_2 = 0$, $5Ca_1 - g_1 = 0$, $7Ca_0a_1 + 2b_2 - 2Cc_2 = 0$.

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 3-е изд., испр. М., 2004.
2. Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 790.
3. Медведева Н.Б. // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 254. С. 11.
4. Чергинец Д.Н. // Тр. XII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения 2007). Мн., 2007. С. 183.
5. Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1743.

Поступила в редакцию 21.12.07.

Дмитрий Николаевич Чергинец – ассистент кафедры дифференциальных уравнений.