УДК 512.64

В.В. КУРСОВ

АЛГЕБРА ИНВАРИАНТОВ ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА

In this work the generators of the ring of the invariants of infinite cyclical group generated by the three-dimensional operator over algebraically closed field are explicitly described.

Пусть k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $GL(3,k)$ – полная линейная группа степени 3 над k, $S = k[x,y,z]$ – кольцо полиномов. Если $\delta \in GL(3,k)$, то определен автоморфизм λ_δ кольца S по правилу: $f(x,y,z) \in S$, $\lambda_\delta(f) = f(x_1,y_1,z_1)$, где $(x_1,y_1,z_1) = (x,y,z)\delta$. Обозначим через S^δ алгебру неподвижных элементов λ_δ относительно указанного действия. Важным является вопрос о конечной порождаемости алгебр инвариантов (см., например, [1], гл. 2). Если групповой порядок δ в $GL(3,k)$ конечен, то S^δ может быть описана при помощи, например, оператора Рейнольдса (см. [2], гл. 7).

Целью настоящей статьи является описание S^δ для произвольного δ. В частности, мы доказываем конечную порождаемость алгебры S^δ при помощи конкретного описания системы образующих элементов. Это описание получается в результате исследования собственных векторов оператора λ_δ в бесконечномерном пространстве S.

Начнем со случая двух переменных x и y. Тогда $S = k[x,y] = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus S_i(x,y)$ – градуированная k-алгебра, $S_i(x,y)$ – пространство однородных форм степени i. Так как случай диагонализируемого оператора тривиален, то, выбирая подходящий базис, мы можем предполагать, что δ имеет нормальную форму $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \neq 0$. Оператор λ_δ действует на каждом пространстве $S_i(x,y)$ и определяет замену: $x \mapsto \lambda x + y$, $y \mapsto \lambda y$. Действуем индуктивно и запишем базис пространства $S_k(x,y)$ следующим образом: x^k, $y\ \left(\textit{базис пространства } S_{k-1}(x,y)\right)$. Тогда матрица A_k оператора λ_δ в этом базисе определяется индуктивно и имеет вид

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ C_k^1\lambda^{k-1} & & & \\ \vdots & & \lambda A_{k-1} & \\ C_k^k & & & \end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)},$$

где C_k^i – биномиальные коэффициенты. В пространстве $S_1(x,y)$ оператор λ_δ имеет единственный собственный вектор $l_1(x,y) = y$. Если E_{k+1} обозначает единичную матрицу соответствующего размера, то, поскольку $\operatorname{char} k = 0$, мы имеем: $\operatorname{rank}\left(A_k - \lambda^k E_{k+1}\right) = k$, так как $\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что $l_1^k = y^k$ – единственный собственный вектор λ_δ в $S_k(x,y)$. Обозначая через $\operatorname{Spectr}\lambda_\delta$ совокупность собственных значений для λ_δ, получаем следующее

Предложение 1. Пусть оператор δ не является вполне приводимым с собственным значением $\lambda \neq 0$. Тогда:

1) если λ не является корнем из 1, то $\operatorname{Spectr}\lambda_\delta = \{\lambda^i \mid i = 0,1,2,\dots\}$, $k[x,y]^\delta = k$, а собственные векторы в $k[x,y]$ относительно λ^i порождены полиномом y;

2) если λ имеет порядок p в k, то $\operatorname{Spectr}\lambda_\delta = \{1,\lambda,\dots,\lambda^{p-1}\}$.

В этом случае $k[x,y]^\delta$ порождена над k полиномом y^p, а собственные векторы с собственным значением $\lambda^i\ (1 \le i \le p-1)$ имеют вид $y^i \cdot f\left(y^p\right)$, где $f(t)$ – произвольный полином переменной t над k.

Переходим теперь к переменным $x, y, z,$ действуя при этом аналогичным образом. По-прежнему $S = k[x,y,z] = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus S_i(x,y,z),$ где $S_i(x,y,z)$ – пространство однородных форм степени i, имеющее размерность $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$. Учитывая предыдущие рассуждения для двух переменных, можно предполагать, что δ имеет матрицу: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \neq 0.$ Тогда преобразование переменных запишется следующим образом: $x \mapsto \lambda x + y,\ y \mapsto \lambda y + z,\ z \mapsto \lambda z.$

Нетрудно видеть, что в пространстве $S_1(x,y,z)$ λ_δ имеет единственный собственный вектор $l_1(x,y,z) = z,$ а в пространстве $S_2(x,y,z)$ их будет два: $l_1^2 = z^2$ и $l_2(x,y,z) = \lambda y^2 - 2\lambda zx - zy.$ Заметим, что $l_2(x,y,z)$ неприводим. Рассмотрим в $S_d(x,y,z)$ следующий базис:

$$x^d, x^{d-1}y, \ldots, x \cdot y^{d-1}, y^d$$
$$zx^{d-1}, zx^{d-2}y, \ldots, zxy^{d-2}, zy^{d-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z^{d-1}x, z^{d-1} \cdot y.$$

Тогда в этом базисе матрица оператора λ_δ имеет вид

$$A_d(3) = \begin{pmatrix} A_d(2) & 0 \\ * & \lambda A_{d-1}(3) \end{pmatrix}_{S(d)\times S(d)}.$$

Здесь $S(d) = \dim S_d(x,y,z),$ цифра в скобках обозначает количество переменных согласно выбору базиса. Элементарные преобразования строк матрицы $A_d(3)$ приводят к равенству

$$\operatorname{rank}\left(A_d(3) - \lambda^d E_{S(d)}\right) = \operatorname{rank}\left(A_{d-1}(3) - \lambda^{d-1} E_{S(d-1)}\right) + 2\left[\frac{d+1}{2}\right], \qquad (*)$$

где E_i – единичная матрица соответствующего размера, $[\ \ ]$ – целая часть числа.

Пусть $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество неотрицательных чисел, определим множество

$$F_d = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid i + 2j = d\right\}, d \in \mathbb{Z}^+.$$

Предложение 2. Полиномы из множества $W = \left\{l_1^i l_2^j \mid (i,j) \in F_d\right\}$ образуют базис собственных векторов оператора λ_δ в пространстве $S_d(x,y,z).$

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанные полиномы линейно независимы над полем $k.$ Согласно равенству $(*)$ имеем

$$\operatorname{rank}\left(A_d(3) - \lambda^d E_{S(d)}\right) = 2\left(\left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{d+1}{2}\right]\right).$$

Тогда подпространство собственных векторов оператора λ_δ в пространстве $S_d(x,y,z)$ имеет над k размерность

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2\left(\left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{d+1}{2}\right]\right) = \left[\frac{d}{2}\right] + 1.$$

С учетом того обстоятельства, что $\operatorname{Card} Fd = \left[\frac{d}{2}\right] + 1,$ завершается доказательство предложения.

Теорема 1. Пусть $f(x,y,z) \in k[x,y,z]$ является собственным вектором с собственным значением $\lambda^d\ (d > 0).$ Тогда:

1) $f \in S_d(x,y,z)$ и $f = \sum\limits_{(i,j)\in Fd} \lambda_{ij} l_1^i l_2^j, \quad \lambda_{ij} \in k;$

2) если λ – бесконечного порядка, то $k[x,y,z]^\delta = k.$

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из предложения 2.

Теорема 2. Если $\lambda \in k^*$ имеет конечный порядок $r,$ то $\operatorname{Spectr}\lambda_\delta = \{1,\lambda,...,\lambda^{r-1}\}$ и алгебра инвариантов $k[x,y,z]^\delta$ имеет конечное число порождающих элементов $T_r = \{l_1^i l_2^j, l_2^r \mid i+2j=r\}.$

Доказательство. Если $f \in k[x,y,z]^\delta$, то он имеет представление через однородные компоненты: $f = f_r + f_{2r} + ... + f_{sr}, f_{ir} \in S_{ir}(x,y,z),$ f_{ir} – собственный вектор с собственным значением $\lambda^{ir}=1.$ Согласно предыдущему f_{ir} есть линейная комбинация над k полиномов $l_1^k l_2^h,$ $(k,h)\in F_{ir}.$ Покажем, что каждая такая компонента порождается элементами из $T_r.$ Рассуждаем по индукции. Пусть $f_{2r} = l_1^a l_2^b,$ $a+2b=2r,$ $a\ge 0, b\ge 0.$ Если $a=0,$ то $b=r$ и $f_{2r}=l_2^r.$ Если $a>0,$ то положим $l_1^a l_2^b = l_1^{x_1} l_2^{y_1} l_1^{x_2} l_2^{y_2},$ где $x_1+2y_1=r, x_2+2y_2=r, a=x_1+x_2, b=y_1+y_2.$ Определим сначала x_1 и y_1 следующим образом. Если r – четно, то $x_1=1, y_1=\frac{r}{2}, x_2=a, y_2=b-y_1.$ Если r – нечетно, $x_1=1,$ $y_1=\frac{r-1}{2}, x_2=a-1(a\ge 1), y_2=b-y_1.$

Теперь мы предполагаем доказанным утверждение для собственных векторов из $S_{kr}(x,y,z).$ Пусть $f_{(k+1)r} = l_1^a l_2^b \in S_{(k+1)r}(x,y,z)$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda^{(k+1)r}=1,$ $a+2b=(k+1)r.$ Если $a=0$ и $k+1$ – нечетно, то r – четно, тогда $b=(k+1)\frac{r}{2}$ и $l_2^b = \left(l_2^{\frac{r}{2}}\right)^{k+1}$, где $l_2^{\frac{r}{2}} \in S_r(x,y,z).$ Пусть теперь $a>0,$ тогда положим $x_1=0, y_1=\frac{r}{2},$ если r – четно, и $x_1=1, y_1=\frac{r-1}{2},$ если r – нечетно. Таким образом, $l_1^{x_1}\cdot l_2^{x_2} \in S_r(x,y,z).$ Далее, определим $x_2=a-x_1, y_2=b-y_1,$ при этом $x_2+2y_2=(a-x_1)+2(b-y_1)=a+2b-(x_1+2y_1)=kr.$ Доказательство теоремы завершается теперь индуктивным образом.

1. Спрингер Т. Теория инвариантов. М., 1981.
2. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы многообразия и алгоритмы. М., 2000.

Поступила в редакцию 17.01.08.

Валерий Владимирович Курсов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры.