

УДК 512.543.76

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, СЮИИ ХВА (КНР)

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ В НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ

It is proved that generalized tetraedron groups with presentation $G = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 \rangle$, where (e_2, e_3) is equal to $(3, 10)$, $(4, 5)$ or $(5, 6)$, contain a non-abelian free subgroup. In particular, the Tits alternative holds for such groups.

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Винберг [1] ввел в рассмотрение обобщенные тетраэдральные группы, имеющие копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 \rangle, \quad (1)$$

где R_1, R_2, R_3 – циклически редуцированные элементы в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3 , которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2 , а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q) . В [2, гл. 9] получен ряд результатов, подтверждающих гипотезу о том, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетво-

ряют альтернативе Титса. Однако для большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной. Справедлива следующая

Теорема. Пусть G – обобщенная тетраэдральная группа одного из типов $(2, 3, 10, 2, 2, 2)$, $(2, 4, 5, 2, 2, 2)$, $(2, 5, 6, 2, 2, 2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу. В частности, G удовлетворяет альтернативе Титса.

Ниже мы будем обозначать через E – единичную матрицу в $SL_2(\mathbb{C})$, через $[A]$ – образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ – след матрицы A , через $\mathcal{O}$ – кольцо целых элементов в $\mathbb{C}$. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неприводимой, если ее прообраз $\bar{H}$ в $SL_2(\mathbb{C})$ – неприводимая подгруппа в обычном смысле. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A], [B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\text{tr } A$, $\text{tr } B$, $\text{tr } AB$ равны нулю. Далее, конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n , а также A_4, S_4, A_5 .

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Тогда $\rho(G)$, а следовательно, и G , содержит неабелеву свободную подгруппу. Следующее наблюдение будет неоднократно использоваться. Пусть $1 < m \in \mathbb{N}$ и $X \in SL_2(\mathbb{C})$. Тогда $[X]^m = 1$ тогда и только тогда, когда $\text{tr } X = 2 \cos \frac{r\pi}{m}$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Доказательство следует из того, что собственными значениями X должны быть числа $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$, где ε – корень степени $2m$ из единицы.

Далее, нам нужна некоторая информация о многочленах Фрике и характерах Фрике. Пусть $F_2 = \langle g, h \rangle$ – свободная группа с образующими g, h . Для элемента $w \in F_2$ рассмотрим регулярную функцию $\tau_w: SL_2(\mathbb{C})^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_w(A, B) = \text{tr } w(A, B)$. Если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s}$, то $\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами [4]. Функцию τ_w обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_w – многочленом Фрике элемента w . Следующие соотношения между характерами Фрике легко следуют из теоремы Гамильтона – Кэли: $\tau_{w^{-1}} = \tau_w$, $\tau_{gh} = \tau_g \tau_h - \tau_{gh^{-1}}$.

Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. По индукции легко проверить, что $P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$. Отсюда следует, что многочлен $P_n(x)$, $n > 0$, имеет n корней, определенных формулой $x_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$.

Если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2$, где $s \geq 1$, – циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то многочлен Q_w имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \dots + M_0(x, y), \quad (2)$$

где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$ [5]. Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\text{tr } A)^2 + (\text{tr } B)^2 + (\text{tr } AB)^2 - \text{tr } A \text{tr } B \text{tr } AB - 4 = 0. \quad (3)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Для произвольных чисел $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$, существуют матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A_i = a_i$, $\text{tr } A_i A_j = a_{ij}$ для всех i, j .

Эту лемму нетрудно доказать непосредственным вычислением.

Пусть G – группа, имеющая копредставление (1) с $e_1 = m = p = q = 2$ и $(e_2, e_3) \in \{(3, 10), (5, 4), (5, 6)\}$. Рассмотрим группу $G_1 = \langle a, b; a^{e_2} = b^{e_3} = R_3^2(a, b) = 1 \rangle$.

Лемма 2. Предположим, что существует такое представление $\rho: G_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, что $\rho(G_1)$ – неэлементарная подгруппа. Тогда группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Пусть $\rho(a) = [A]$, $\rho(b) = [B]$. Тогда $A \neq \pm E$, $B \neq \pm E$ и $\text{tr } A = 2 \cos \frac{r\pi}{e_2} = \alpha$,

$\text{tr } B = 2 \cos \frac{s\pi}{e_3} = \beta$, $\text{tr } AB = \gamma$ для некоторых целых чисел $0 < r < e_2$, $0 < s < e_3$. Обозначим через h_1, h_2 порядки элементов $[A]$ и $[B]$ в $PSL_2(\mathbb{C})$. Пусть $S_1(a_1, a_2)$ – циклическая редукция слова $R_1(a_1, a_2)$ в свободном произведении $\langle a_1; a_1^2 = 1 \rangle * \langle a_2; a_2^{h_1} = 1 \rangle$, а $S_2(a_1, a_3)$ – циклическая редукция слова $R_2(a_1, a_3)$ в свободном произведении $\langle a_1; a_1^2 = 1 \rangle * \langle a_3; a_3^{h_2} = 1 \rangle$. Если $S_1(a_1, a_2)$ – непустое слово, то рассмотрим многочлен Фрике $Q_{S_1}(\tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_1 a_2})$ слова S_1 и определим многочлен $f_1(z_1) = Q_{S_1}(0, \alpha, z_1)$, где $z_1 = \tau_{a_1 a_2}$. Многочлен f_1 имеет степень > 0 и поэтому имеет корень $z_1 = z_1^0$. Если слово S_1 пусто, то положим $z_1^0 = 3$. Рассматривая аналогично слово $S_2(a_1, a_3)$, определим многочлен $f_2(z_2) = Q_{S_2}(0, \beta, z_2)$, где $z_2 = \tau_{a_1 a_3}$. Пусть $z_2 = z_2^0$ – корень f_2 , если S_2 – непусто, и $z_2^0 = 3$, если S_2 – пусто. В силу леммы 1 для шестерки чисел $(0, \alpha, \beta, z_1^0, z_2^0, \gamma)$ найдется тройка матриц $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ таких, что $\text{tr } A_1 = 0$, $\text{tr } A_2 = \alpha$, $\text{tr } A_3 = \beta$, $\text{tr } A_1 A_2 = z_1^0$, $\text{tr } A_1 A_3 = z_2^0$, $\text{tr } A_2 A_3 = \gamma$. Заметим, что поскольку выполняются равенства $\text{tr } A_2 = \text{tr } A$, $\text{tr } A_3 = \text{tr } B$, $\text{tr } A_2 A_3 = \text{tr } AB$ и группа $\langle A, B \rangle$ неприводима, то подгруппы $\langle A, B \rangle$ и $\langle A_2, A_3 \rangle$ сопряжены, т. е. существует матрица C такая, что $CA_2 C^{-1} = A$, $CA_3 C^{-1} = B$. Поэтому от тройки (A_1, A_2, A_3) мы можем перейти к сопряженной тройке $C(A_1, A_2, A_3)C^{-1} = (A_1', A, B)$. По построению для элементов $[A_1']$, $[A]$, $[B]$ в $PSL_2(\mathbb{C})$ выполняются соотношения

$$[A_1']^2 = [A]^{e_2} = [B]^{e_3} = R_1^2([A_1'], [A]) = R_2^2([A_1'], [B]) = R_3^2([A], [B]) = 1.$$

Следовательно, мы имеем представление $\rho_1: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, задаваемое равенствами $\rho_1(a_1) = [A_1']$, $\rho_1(a_2) = [A]$, $\rho_1(a_3) = [B]$. Поскольку группа $\rho_1(G)$ содержит подгруппу $\langle [A], [B] \rangle$, которая является неэлементарной, то $\rho_1(G)$ также неэлементарна. Следовательно, $\rho_1(G)$, а поэтому и G содержит неабелеву свободную подгруппу. Лемма 2 доказана.

Докажем, что существует такое представление $\rho: G_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, что $\rho(G_1)$ – неэлементарная подгруппа. Пусть $F_2 = \langle g, h \rangle$ – свободная группа и $\tau_g, \tau_h, \tau_{gh}$ – характеры Фрике. Положим $\tau_g = 2 \cos \frac{\pi}{e_2} = \alpha$, $\tau_h = 2 \cos \frac{\pi}{e_3} = \beta$, $\tau_{gh} = z$. Если $R_3(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \dots a^{u_s} b^{v_s}$, где $0 < u_i < e_2$, $0 < v_i < e_3$, $s \geq 1$, то рассмотрим многочлен Фрике $Q_{R_3(g, h)}(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$ и определим многочлен $f(z) = Q_{R_3}(\alpha, \beta, z)$. В силу (2)

$$f(z) = M_0 z^s + M_1 z^{s-1} + \dots + M_s, \quad (4)$$

где $M_0 = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(\alpha) P_{v_i-1}(\beta)$. Далее заметим, что в силу (3) пара матриц A, B таких, что $\text{tr } A = \alpha$, $\text{tr } B = \beta$, $\text{tr } AB = z$, приводима тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$z^2 - \alpha\beta z + \alpha^2 + \beta^2 - 4 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет корни $z_1 = 2 \cos(\frac{\pi}{e_2} + \frac{\pi}{e_3})$ и $z_2 = 2 \cos(\frac{\pi}{e_2} - \frac{\pi}{e_3})$.

Заметим, что если многочлен $f(z)$ в (4) имеет корень z_0 , отличный от z_1, z_2 , то группа $H = \langle [A], [B] \rangle$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$. Действительно, H – неприводима и отлична от бесконечной группы диэдра, поскольку $\text{tr } A \neq 0$ и $\text{tr } B \neq 0$. Далее, если $(e_2, e_3) \neq (4, 5)$, то H бесконечна, поскольку содержит элемент $[B]$ порядка $e_3 \geq 6$, поэтому не может совпадать с A_4, S_4, A_5 . Если же $(e_2, e_3) = (4, 5)$, то H также бесконечна, потому что в противном случае она должна совпадать с группой A_5 , а это невозможно, так как в A_5 нет элемента порядка 4. Поскольку отображение $\rho(a) = [A]$, $\rho(b) = [B]$ задает представление $\rho: G_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом, то в силу леммы 2 G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Будем теперь предполагать, что единственными корнями $f(z)$ являются z_1 и z_2 , определенные ранее. Тогда

$$f(z) = M_0(z - z_1)^k(z - z_2)^{s-k}. \quad (6)$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $k > 0$. Пусть ε – примитивный корень из 1 степени $2e_2e_3$. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^{e_3} & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-e_3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon^{e_2} & 0 \\ y & \varepsilon^{-e_2} \end{pmatrix},$$

для которых $\text{tr } A = \alpha$, $\text{tr } B = \beta$, $\text{tr } AB = y + z_1$. Из (6) получаем, что

$$\text{tr } R_3(A, B) = f(y + z_1) = M_0 y^k (y + z_1 - z_2)^{s-k}. \quad (7)$$

В то же время $\text{tr } R_3(A, B)$ является многочленом от y , свободный коэффициент которого равен

$$\varepsilon^{e_3 u + e_2 v} + \varepsilon^{-(e_3 u + e_2 v)} = 2 \cos \frac{e_3 u + e_2 v}{e_2 e_3} \pi, \quad (8)$$

где $u = \sum_{i=1}^s u_i$, $v = \sum_{i=1}^s v_i$. Из (7) и (8) следует, что

$$2 \cos \frac{e_3 u + e_2 v}{e_2 e_3} \pi = 0. \quad (9)$$

Из (9) получаем, что

$$u \equiv 0 \pmod{e_2}, \quad v \equiv \frac{e_3}{2} \pmod{e_3}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь группу $G_2 = \left\langle c, d; c^{e_2} = d^{\frac{e_3}{2}} = R_3^2(c, d) = 1 \right\rangle$. Ясно, что отображение $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$, задаваемое условиями $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, является эпиморфизмом. Пусть слово $R(c, d) = c^{p_1} d^{q_1} \dots c^{p_t} d^{p_t}$ – циклическая редукция слова $R_3(c, d)$ в свободном произведении $K = \langle c; c^{e_2} = 1 \rangle * \left\langle d; d^{\frac{e_3}{2}} = 1 \right\rangle$.

Если $t = 0$, то $G_2 = K$. Пусть δ – примитивный корень из 1 степени e_2e_3 . Тогда пара матриц

$$C = \begin{pmatrix} \delta^{\frac{e_3}{2}} & 1 \\ 0 & \delta^{-\frac{e_3}{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \delta^{e_2} & 0 \\ y & \delta^{-e_2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где y – произвольный трансцендентный элемент из $\mathbb{C}$, задает представление $\rho: G_2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, $\rho(c) = [C]$, $\rho(d) = [D]$. Поскольку $\text{tr } CD = y + 2 \cos \frac{2e_2 + e_3}{e_2 e_3} \pi$ – трансцендентный элемент, то $[CD]$

имеет бесконечный порядок и группа $\langle [C], [D] \rangle$ неприводима, поскольку (3) не выполняется. Очевидно, $\rho(G_2)$ отлична от бесконечной группы диэдра. Следовательно, $\rho(G_2)$ – неэлементарная подгруппа. По построению отображение $a \rightarrow [C]$, $b \rightarrow [D]$ задает представление $\rho_1: G_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Применяя лемму 2, мы получаем доказательство теоремы в случае $t = 0$.

Будем теперь предполагать, что $t > 0$. Тогда

$$P = \sum_{i=1}^t p_i \equiv 0 \pmod{e_2}, \quad Q = \sum_{i=1}^t q_i \equiv 0 \pmod{\frac{e_3}{2}}. \quad (12)$$

Пусть $Q_R(\tau_c, \tau_d, \tau_{cd})$ – многочлен Фрике слова R . Положим $\tau_c = 2 \cos \frac{\pi}{e_2} = \alpha$, $\tau_d = 2 \cos \frac{2\pi}{e_3} = \beta$, $\tau_{cd} = z$ и рассмотрим многочлен

$$g(z) = Q_R(\alpha, \beta, z) = M_0 z^t + M_1 z^{t-1} + \dots + M_t,$$

где $M_0 = \prod_{i=1}^t P_{p_i-1}(\alpha) P_{q_i-1}(\beta)$. Дальнейшее доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 3. Предположим, что выполнено одно из условий:

- 1) $(e_2, e_3) = (3, 10)$ или $(e_2, e_3) = (5, 6)$ и многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от $2 \cos \frac{2e_2 \pm e_3}{e_2 e_3} \pi$, 0 , 1 , $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;
- 2) $(e_2, e_3) = (5, 4)$ и многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от $2 \cos \frac{2e_2 \pm e_3}{e_2 e_3} \pi$, 0 , ± 1 , $\pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Тогда группа G_2 имеет представление в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.

Доказательство. Пусть $C, D \in SL_2(\mathbb{C})$ такие матрицы, что $\text{tr } C = \alpha$, $\text{tr } D = \beta$, $\text{tr } CD = z_0$. Тогда группа $\langle C, D \rangle$ неприводима, поскольку равенство (3) не выполняется, и отлична от группы диэдра, поскольку $\alpha \neq 0$ и $z_0 \neq 0$. Кроме того, группа $\langle C, D \rangle$ бесконечна (см. [6, § 5]). Значит, отображение $\rho: G_2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, $\rho(c) = [C]$, $\rho(d) = [D]$, является представлением с неэлементарным образом $\rho(G_2) = \langle [C], [D] \rangle$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Числа $2 \cos \frac{2e_2 \pm e_3}{e_2 e_3} \pi$ не являются корнями многочлена $g(z)$.

Доказательство. Пусть, например, $z_1 = 2 \cos \frac{2e_2 + e_3}{e_2 e_3} \pi$ является корнем $g(z)$. Тогда $g(z) = (z - z_1)g_1(z)$. Пусть C, D – матрицы, задаваемые равенствами (11). Тогда мы должны иметь равенство

$$\text{tr } R(C, D) = g(y + z_1) = yg_1(y + z_1). \quad (13)$$

Но равенство (13) невозможно, поскольку свободный коэффициент многочлена $yg_1(y + z_1)$ равен нулю, а свободный коэффициент $\text{tr } R(C, D)$ равен $2 \cos \frac{e_3 P + 2e_2 Q}{e_2 e_3} \pi = \pm 2$ в силу (12). Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы завершает

Лемма 5. 1) Если $(e_2, e_3) = (3, 10)$ или $(e_2, e_3) = (5, 6)$, то многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от 0 , 1 , $\frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}$.

2) Если $(e_2, e_3) = (5, 4)$, то многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от 0 , ± 1 , $\pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Доказательство. 1) Заметим, что случаи $(e_2, e_3) = (3, 10)$ и $(e_2, e_3) = (5, 6)$ совершенно симметричны. В первом случае $G_2 = \langle c, d; c^3 = d^5 = R_3^2(c, d) = 1 \rangle$, а во втором – $G_2 = \langle c, d; c^5 = d^3 = R_3^2(c, d) = 1 \rangle$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $(e_2, e_3) = (3, 10)$. Допустим, что

$$g(z) = M_0 z^{k_1} (z-1)^{k_2} \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_3} \left(z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_4}.$$

Тогда для матриц C, D из (11) мы должны иметь равенство

$$\text{tr } R(C, D) = M_0 (y+z_1)^{k_1} (y+z_1-1)^{k_2} \left(y+z_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_3} \left(y+z_1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_4}, \quad (14)$$

где $z_1 = 2 \cos \frac{8\pi}{15}$, $M_0 = \prod_{i=1}^l P_{p_i-1}(2 \cos \frac{\pi}{3}) P_{q_i-1}(2 \cos \frac{\pi}{5})$. Поскольку $0 < p_i < 3$, $0 < q_i < 5$, то, учитывая, что $P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$, получаем

$$P_{p_i-1}(1) = 1, \quad P_{q_i-1}(2 \cos \frac{\pi}{5}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i = 1, 4, \\ 2 \cos \frac{\pi}{5}, & \text{если } q_i = 2, 3. \end{cases}$$

Обозначим через r количество q_i , равных 2 или 3. Тогда $M_0 = (2 \cos \frac{\pi}{5})^r$. Сравнивая свободные коэффициенты в левой и правой части (14), находим

$$(2 \cos \frac{\pi}{5})^r z_1^{k_1} (z_1-1)^{k_2} \left(z_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_3} \left(z_1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k_4} = 2 \cos \frac{e_3 P + 2e_2 Q}{e_2 e_3} = \pm 2. \quad (15)$$

Используя элементарные тригонометрические преобразования, заметим, что

$$z_1 - 1 = -\left(2 \sin \frac{13\pi}{30} \right) \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \right), \quad z_1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -2 \sin \frac{11\pi}{30}, \quad z_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\left(2 \sin \frac{\pi}{15} \right) \left(2 \sin \frac{7\pi}{15} \right).$$

Тогда равенство (15) принимает вид

$$\left(2 \sin \frac{3\pi}{10} \right)^r \left(2 \sin \frac{\pi}{30} \right)^{k_1} \left(2 \sin \frac{13\pi}{30} \right)^{k_2} \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \right)^{k_3} \left(2 \sin \frac{11\pi}{30} \right)^{k_4} \left(2 \sin \frac{\pi}{15} \right)^{k_4} \left(2 \sin \frac{7\pi}{15} \right)^{k_4} = \pm 2. \quad (16)$$

Чтобы привести (16) к противоречию, воспользуемся следующим утверждением (см. [7, лемма 3]).

Пусть $K = \mathbb{Q}(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n})$ и $2 \sin \frac{r\pi}{k} \in K$, где $(r, k) = 1$. Тогда $N_{K/\mathbb{Q}}(2 \sin \frac{r\pi}{k}) = 1$ в случае, если k не

является степенью некоторого простого числа p , т. е. $2 \sin \frac{r\pi}{k} \in \mathcal{O}^*$. Если же $k = p^l$, то p делит

$N_{K/\mathbb{Q}}(2 \sin \frac{r\pi}{p^l})$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\cos \frac{\pi}{15}, \sin \frac{\pi}{15})$. Сравнивая нормы левой и правой части в (16), получаем,

что левая часть (16) принадлежит $\mathcal{O}^*$, а правая – нет. Противоречие.

2) Допустим, что $g(z) = M_0 z^{k_1} (z-1)^{k_2} (z+1)^{k_3} \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k_4} \left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k_5}$. Как и ранее, для матриц

C, D из (11) мы должны иметь равенство

$$\text{tr } R(C, D) = M_0 (y+z_1)^{k_1} (y+z_1-1)^{k_2} (y+z_1+1)^{k_3} \left(y+z_1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k_4} \left(y+z_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k_5}, \quad (17)$$

где $z_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{10}$, $M_0 = \prod_{i=1}^t P_{p_i-1} (2 \cos \frac{\pi}{5}) = \left(2 \cos \frac{\pi}{5} \right)^r$, r – количество p_i , равных 2 или 3. Сравнивая свободные коэффициенты в левой и правой части (17) и выполняя необходимые тригонометрические преобразования, мы, как и в случае 1), получаем равенство

$$\begin{aligned} & (2 \sin \frac{3\pi}{10})^r (2 \sin \frac{\pi}{5})^{k_1} (2 \sin \frac{29\pi}{60})^{k_2} (2 \sin \frac{11\pi}{60})^{k_2} (2 \sin \frac{19\pi}{60})^{k_3} (2 \sin \frac{\pi}{60})^{k_3} \times \\ & \times (2 \sin \frac{7\pi}{20})^{k_4} (2 \sin \frac{\pi}{20})^{k_4} (2 \sin \frac{9\pi}{20})^{k_5} (2 \sin \frac{3\pi}{20})^{k_5} = \pm 2. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $K = \mathbb{Q}(\cos \frac{\pi}{60}, \sin \frac{\pi}{60})$. Сравнивая нормы левой и правой части (18) в поле K , получаем, что $k_1 = 0$ (в противном случае норма левой части была бы целым числом, делящимся на 5, а норма левой – степенью 2). Но тогда левая часть принадлежит $\mathcal{O}^*$, а правая – нет. Это противоречие и завершает доказательство теоремы.

1. Винберг Э.Б. // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 3.
2. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, 1999.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.
4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.
5. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. P. 369.
6. Vinberg E.B., Kaplinsky // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 2004. Vol. 311. P. 564.
7. Беняш-Кривец В.В. // Докл. НАН Беларуси. 2002 Т. 46. № 3. С. 51.

Поступила в редакцию 18.01.08.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры.
Сюин Хуа – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – В.В. Беняш-Кривец.