УДК 517.913

В.Н. ГОРБУЗОВ, А.Ф. ПРОНЕВИЧ

**ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
СИСТЕМ ПРОСТОЙ МАТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ**

We consider real linear homogeneous and non-homogeneous systems in total differentials with non-derogatory matrix structure. We investigate the problem of the existence a general integral. The spectral method of the general integral construction for these completely solvable systems was developed. The method is based on the existence linear partial integral of homogeneous differential system corresponding to the linear non-homogeneous system in total differentials. Obtain evident form of real first integrals. Using real and complex eigenvectors corresponding to the eigenfunctions of the matrices of coefficients for system in total diferentials, we can build functionally independent first integrals.

Рассмотрим вещественную линейную неоднородную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^m (A_j(t)x + f_j(t)) dt_j, \quad (1)$$

где $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$ и $t = \text{colon}(t_1, \dots, t_m)$ – точки пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, вектор-столбец $dx = \text{colon}(dx_1, \dots, dx_n)$, непрерывно дифференцируемые на области $V \subset \mathbf{R}^m$ матрицы коэффициентов $A_j : t \rightarrow A_j(t) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}$, одновременно диагонализуются с помощью постоянной

трансформирующей матрицы [1, с. 61], а векторные функции $f_j : t \rightarrow \text{colon}(f_{j1}(t), \dots, f_{jn}(t)) \quad \forall t \in V$, $j = \overline{1, m}$, из класса $C^1(V)$.

Наряду с дифференциальной системой (1) будем рассматривать соответствующую ей линейную однородную систему в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^m A_j(t)x dt_j. \tag{2}$$

Заметим, что при $m = 1$ обыкновенная линейная однородная дифференциальная система (2) будет алгебраически приводимой [2, с. 186].

Условия Фробениуса полной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах (1) выражаются системой тождеств [3, с. 44; 4, с. 73]:

$$\partial_{t_j} A_\xi(t) = \partial_{t_\xi} A_j(t) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi = \overline{1, m}, \tag{3}$$

$$\partial_{t_j} f_\xi(t) + A_\xi(t)f_j(t) = \partial_{t_\xi} f_j(t) + A_j(t)f_\xi(t) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi = \overline{1, m}. \tag{4}$$

В [5] для многомерных дифференциальных систем разработан метод построения первых интегралов и последних множителей по частным интегралам. На основе этих подходов спектральным методом построен интегральный базис линейных однородных систем в частных производных [6] и систем в полных дифференциалах с постоянными коэффициентами [7–9]. Ставится задача построения базиса первых интегралов вполне разрешимых дифференциальных систем (1) и (2).

Частные интегралы. Линейная однородная функция

$$p : x \rightarrow vx \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \tag{5}$$

где вектор $v \in \mathbf{C}^n$, будет частным интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (2) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{J}_j p(x) = \lambda_j(t)p(x) \quad \forall (t, x) \in V \times \mathbf{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{J}_j(t, x) = \partial_{t_j} + A_j(t)x\partial_x \quad \forall (t, x) \in V \times \mathbf{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

оператор $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, а скалярные функции λ_j определены на $V \subset \mathbf{R}^m$.

Система тождеств (6) распадается на линейную однородную систему

$$(B_j(t) - \lambda_j(t)E)v = 0 \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7}$$

где E – единичная матрица n -го порядка, а матрицы $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$ являются транспонированными к матрицам $A_j : t \rightarrow A_j(t) \quad \forall t \in V$, $j = \overline{1, m}$, соответственно.

В основании метода построения первых интегралов систем уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) лежат следующие два утверждения (леммы 1 и 2).

Лемма 1. Пусть v – общий вещественный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, $j = \overline{1, m}$. Тогда линейная функция (5) будет частным интегралом вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (2).

Действительно, если v есть общий собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$ с собственными функциями $\lambda_j : t \rightarrow \lambda_j(t) \quad \forall t \in V$, $j = \overline{1, m}$, то он является решением системы (7). Тогда выполняются тождества (6) и, следовательно, функция (5) будет линейным частным интегралом дифференциальной системы (2). ■

Методами, аналогичными изложенным в [5, с. 190–191], доказывается

Лемма 2. Пусть $v = \mu + \eta i$ ($\mu = \text{Re } v$, $\eta = \text{Im } v$) – общий существенно комплексный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, которому соответствуют собственные функции

$$\lambda_j : t \rightarrow \alpha_j(t) + \beta_j(t)i \quad (\alpha_j : t \rightarrow \text{Re } \lambda_j(t), \beta_j : t \rightarrow \text{Im } \lambda_j(t)) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда производные Ли в силу системы (2) скалярных функций

$$P : x \rightarrow (\mu x)^2 + (\eta x)^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad \text{и} \quad \psi : x \rightarrow \text{arctg} \frac{\eta x}{\mu x} \quad \forall x \in \Omega,$$

где Ω – область из множества $\{x : \mu x \neq 0\}$, равны

$$\mathfrak{I}_j P(x) = 2\alpha_j(t)P(x) \quad \forall (t, x) \in V \times \mathbf{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

и

$$\mathfrak{I}_j \psi(x) = \beta_j(t) \quad \forall (t, x) \in V \times \Omega, \quad j = \overline{1, m}.$$

Первые интегралы. Построение первых интегралов вполне разрешимой дифференциальной системы (1) основано на следующих утверждениях (теоремы 1 и 2).

Теорема 1. Пусть ν – общий вещественный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j : t \rightarrow \lambda_j(t) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (1) будет скалярная функция

$$F : (t, x) \rightarrow \nu x \varphi(t) - \int \sum_{j=1}^m \nu f_j(t) \varphi(t) dt_j \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \mathbf{R}^n, \quad (8)$$

где экспоненциальная функция

$$\varphi : t \rightarrow \exp\left(-\int \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) dt_j\right) \quad \forall t \in \tilde{V},$$

а $\tilde{V}$ – односвязная область из $V \subset \mathbf{R}^m$.

Доказательство. Из тождеств (3) следует, что дифференциальная 1-форма

$$\omega : t \rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) dt_j \quad \forall t \in V$$

является замкнутой на области V из расширяемого пространства $\mathbf{R}^m$.

С учетом этого для гладкой дифференциальной 1-формы

$$\tilde{\omega} : t \rightarrow \sum_{j=1}^m \nu f_j(t) \varphi(t) dt_j \quad \forall t \in V$$

внешний дифференциал

$$d\tilde{\omega}(t) = \varphi(t) \sum_{j=1}^m \sum_{\xi=1}^m (\partial_{t_\xi} \nu f_j(t) - \lambda_\xi(t) \nu f_j(t)) dt_\xi \wedge dt_j \quad \forall t \in V.$$

Отсюда на основании тождеств (4) и того, что

$$dt_j \wedge dt_j = 0, \quad dt_\xi \wedge dt_j = -dt_j \wedge dt_\xi, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi = \overline{1, m},$$

получаем, что дифференциальная 1-форма $\tilde{\omega}$ будет замкнутой на области V . Тогда по теореме Пуанкаре [10, с. 222] дифференциальные 1-формы ω и $\tilde{\omega}$ будут точными на любой односвязной области $\tilde{V}$, содержащейся в V , а, значит, криволинейные интегралы $\int \omega$ и $\int \tilde{\omega}$ в области $\tilde{V}$ не зависят от пути интегрирования.

Используя лемму 1 и то, что 1-формы ω и $\tilde{\omega}$ являются точными на области $\tilde{V}$, вычислим действия линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{R}_j(t, x) = \mathfrak{I}_j(t, x) + f_j(t) \partial_x \quad \forall (t, x) \in V \times \mathbf{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

индуцированных системой (1), на скалярную функцию (8):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_j F(t, x) &= \mathfrak{I}_j F(t, x) + f_j(t) \partial_x F(t, x) = \nu x \partial_{t_j} \varphi(t) - \partial_{t_j} \int \sum_{j=1}^m \nu f_j(t) \varphi(t) dt_j + \\ &+ \varphi(t) \mathfrak{I}_j \nu x + f_j(t) \partial_x \nu x \varphi(t) = 0 \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \mathbf{R}^n, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Следовательно, скалярная функция (8) будет первым интегралом вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1). ■

Теорема 2. Пусть $\nu = \mu + \eta i$ – общий существенно комплексный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j : t \rightarrow \alpha_j(t) + \beta_j(t)i \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (1) будут функции

$$F_\tau : (t, x) \rightarrow \gamma_\tau(t; x) - \int_{j=1}^m \gamma_\tau(t; f_j(t)) dt_j \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \mathbf{R}^n, \quad \tau = 1, 2, \quad (9)$$

где $\tilde{V}$ – односвязная область из V , а на области $\tilde{V} \times \mathbf{R}^n$ скалярные функции

$$\begin{aligned} \gamma_1(t; x) &= \left(\mu x \cos \int_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j + \eta x \sin \int_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j \right) \exp\left(- \int_{j=1}^m \alpha_j(t) dt_j\right), \\ \gamma_2(t; x) &= \left(\eta x \cos \int_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j - \mu x \sin \int_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j \right) \exp\left(- \int_{j=1}^m \alpha_j(t) dt_j\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Формально применяя теорему 1, получим комплекснозначный первый интеграл вида (8). Выделяя в нем действительную и мнимую части, получим вещественнозначные первые интегралы дифференциальной системы (1) вида (9). ■

На основании теорем 1 и 2 для вполне разрешимой линейной однородной системы в полных дифференциалах (2) получаем следующие закономерности.

Следствие 1. Пусть v – общий вещественный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j : t \rightarrow \lambda_j(t) \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}$. Тогда скалярная функция

$$F : (t, x) \rightarrow vx \exp\left(- \int_{j=1}^m \lambda_j(t) dt_j\right) \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \mathbf{R}^n$$

будет первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (2).

Следствие 2. Пусть $v = \mu + \eta i$ – общий существенно комплексный собственный вектор функциональных матриц $B_j : t \rightarrow B_j(t) \quad \forall t \in V$, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j : t \rightarrow \alpha_j(t) + \beta_j(t)i \quad \forall t \in V, \quad j = \overline{1, m}$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (2) будут функции

$$F_1 : (t, x) \rightarrow \left((\mu x)^2 + (\eta x)^2 \right) \exp\left(- 2 \int_{j=1}^m \alpha_j(t) dt_j\right) \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \mathbf{R}^n$$

и

$$F_2 : (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\eta x}{\mu x} - \int_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j \quad \forall (t, x) \in \tilde{V} \times \Omega,$$

где $\tilde{V}$ – односвязная область из V , а Ω – любая область из множества $\{x : \mu x \neq 0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основано на вычислении производных Ли в силу системы в полных дифференциалах (2) скалярных функций F_1 и F_2 с учетом леммы 2 и того, что гладкие дифференциальные 1-формы

$$\omega_1 : t \rightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) dt_j \quad \text{и} \quad \omega_2 : t \rightarrow \sum_{j=1}^m \beta_j(t) dt_j$$

являются точными на односвязной области $\tilde{V}$ из V . ■

Для вполне разрешимой системы в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= ((t_1^2 + t_2^2 + \operatorname{th}(t_1 + 1))x_1 + \operatorname{th}(t_1 + 1)x_3) dt_1 + 2t_1 t_2 x_1 dt_2, \\ dx_2 &= ((\operatorname{th}(t_1 + 1) + t_2 \cos t_1 - t_1^2 - t_2^2)x_1 + t_2 \cos t_1 x_2 + (t_2 \cos t_1 - t_1^2 - t_2^2)x_3) dt_1 + \\ &\quad + ((\sin t_1 - 2t_1 t_2)x_1 + \sin t_1 x_2 + (\sin t_1 - 2t_1 t_2)x_3) dt_2, \\ dx_3 &= (-2\operatorname{th}(t_1 + 1)x_1 + (t_1^2 + t_2^2 - \operatorname{th}(t_1 + 1))x_3) dt_1 + 2t_1 t_2 x_3 dt_2 \end{aligned} \quad (10)$$

по собственным векторам $v^1 = (1, 1, 1)$, $v^2 = (1 + i, 0, 1)$ и $v^3 = (1 - i, 0, 1)$, которым соответствуют собственные функции $\lambda_1^1 : t \rightarrow t_2 \cos t_1$, $\lambda_1^2 : t \rightarrow \sin t_1$, $\lambda_2^1 : t \rightarrow t_1^2 + t_2^2 + \operatorname{th}(t_1 + 1)i$, $\lambda_2^2 : t \rightarrow 2t_1 t_2 \quad \forall t \in \mathbf{R}^2$ и $\lambda_3^1 : t \rightarrow t_1^2 + t_2^2 - \operatorname{th}(t_1 + 1)i$, $\lambda_3^2 : t \rightarrow 2t_1 t_2 \quad \forall t \in \mathbf{R}^2$ соответственно, строим первые интегралы (следствия 1 и 2):

$$F_{1,10} : (t, x) \rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) \exp(-t_2 \sin t_1) \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}^5,$$

$$F_{2,10} : (t, x) \rightarrow ((x_1 + x_3)^2 + x_1^2) \exp\left(-\frac{2}{3}t_1^3 - 2t_1 t_2^2\right) \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}^5$$

и

$$F_{3,10} : (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_1 + x_3} - \ln \operatorname{ch}(t_1 + 1) \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}^2 \times \Omega_{10},$$

где Ω_{10} – любая область из множества $\{x : x_1 + x_3 \neq 0\}$ пространства $\mathbf{R}^3$.

Первые интегралы $F_{1,10}$, $F_{2,10}$ и $F_{3,10}$, будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис на области $\mathbf{R}^2 \times \Omega_{10}$ вполне разрешимой системы (10).

Таким образом, нами предложен спектральный метод построения первых интегралов для вполне разрешимых неавтономных линейных многомерных дифференциальных систем простой матричной структуры. Доказаны утверждения, позволяющие в зависимости от общих собственных векторов по собственным функциям матриц коэффициентов линейной неоднородной дифференциальной системы в явном виде строить первые интегралы (теоремы 1 и 2). Отражена специфика в построении первых интегралов линейной однородной системы в полных дифференциалах (следствия 1 и 2).

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
2. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. Мн., 1996.
3. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004.
4. Амелькин В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М., 2003.
5. Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно, 2006.
6. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. // Дифференц. уравнения и процессы управления [Электронный ресурс]. 2001. № 3. С. 17. Режим доступа: <http://www.neva.ru/journal>
7. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. // Весн. Гродз. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2003. № 2(22). С. 50.
8. Проневич А.Ф. Автономные интегралы линейных систем в полных дифференциалах / Ред. журн. «Дифференциальные уравнения». Мн., 2002. 24 с. Деп. в ВИНТИ 02.10.02. № 1667-В 2002.
9. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 49.
10. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.

Поступила в редакцию 04.03.08.

Виктор Николаевич Горбузов – кандидат физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информатики ГрГУ им. Я. Купалы.

Андрей Францевич Проневич – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем ГрГУ им. Я. Купалы.