УДК 517.5

В.Н. РУСАК, И.В. РЫБАЧЕНКО

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ*

Order estimates of deviation for special rational operators in integral and uniform metric of space $C(R)$ for meromorphic functions which have simple poles $\{-ki, ki\}$, $k=\overline{1,\infty}$, are obtained.

Будем рассматривать мероморфные функции, представимые в виде интеграла, зависящего от параметра

$$F(z)=\frac{z}{1-e^{-2\pi z}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-tz}dt. \tag{1}$$

Очевидно, числитель и знаменатель правой части суть аналитические функции во всей комплексной плоскости, поэтому их отношение будет мероморфной функцией, имеющей простые полюсы в нулях знаменателя

$$\pm i, \pm 2i, \ldots, \pm ki, \ldots.$$

Теорема 1. Если $f(t)$ принадлежит пространству $L_p[0,2\pi]$, $p>1$, то мероморфная функция $F(z)$ раскладывается в ряд по простым дробям

$$F(z)=\frac{F_0}{2}+z\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{F_k}{z-ki}+\frac{F_{-k}}{z+ki}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Следуя методу Коши разложения мероморфных функций в ряды простых дробей (см., например, [1, с. 430]), выбираем последовательность квадратов с центром в начале координат и сторонами $2n+1$, $n=\overline{0,\infty}$. Убедимся, что мероморфная функция

$$F_1(z)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{z}F(z) \tag{3}$$

равномерно ограничена на границах выбранной последовательности квадратов. Действительно, на верхней стороне квадрата $z=x+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$. С помощью неравенства Гельдера найдем

$$\left|F_1(z)\right|\le\int_0^{2\pi}|f(t)|\left|e^{-tz}\right|\left|1-e^{-2\pi\left(x+i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}\right|^{-1}dt\le$$

$$\le\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}e^{-txq}dt\right)^{\frac{1}{q}}\left|1-e^{-2\pi x}e^{-i\pi(2n+1)}\right|^{-1}=$$

$$=\frac{\|f\|_{L_p}}{1+e^{-2\pi x}}\left(\frac{1-e^{-2\pi xq}}{xq}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Если $0\le x\le n+\frac{1}{2}$, то из (4) следует, что

$$|F_1(z)|\le\|f\|_{L_p}\left(\frac{1-e^{-2\pi xq}}{xq}\right)^{\frac{1}{q}}\le(2\pi)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p}. \tag{5}$$

Для отрицательных значений x, $-\left(n+\frac{1}{2}\right)\le x\le 0$, будем иметь

$$\left|F_1(z)\right|\le\|f\|_{L_p}\left(\frac{1-e^{-2\pi xq}}{xqe^{-2\pi xq}}\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_{L_p}\left(\frac{e^{2\pi xq}-1}{xq}\right)^{\frac{1}{q}}\le(2\pi)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p}. \tag{6}$$

Поскольку неравенство (4) не меняется при замене i на $-i$, то на нижней стороне квадрата $z=x-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $|x|\le n+\frac{1}{2}$, будет выполняться неравенство

$$\left|F_1(z)\right|\le(2\pi)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p}. \tag{7}$$

На левой стороне $z=-(n+\frac{1}{2})+iy$, $|y|\le n+\frac{1}{2}$, с учетом (1), (3) и неравенства Гельдера найдем

* Авторы статьи – сотрудники кафедры высшей математики и математической физики.

$$\left|F_1(z)\right| \le \int_0^{2\pi}\left|f(t)\right|e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt\left|1-e^{\pi(2n+1)-2\pi i y}\right|^{-1} \le$$

$$\le \left\|f\right\|_{L_p}\left(\int_0^{2\pi}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)tq}dt\right)^{\frac{1}{q}}\left|1-e^{\pi(2n+1)}\right|^{-1} = \tag{8}$$

$$= \left\|f\right\|_{L_p}\left(\frac{e^{\pi(2n+1)q}-1}{q(n+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{e^{\pi(2n+1)}-1} \le \frac{2}{\left(q(n+\frac{1}{2})\right)^{\frac{1}{q}}}\left\|f\right\|_{L_p}.$$

Наконец, если $z = n+\frac{1}{2}+iy$, $|y| \le n+\frac{1}{2}$, то аналогичными преобразованиями получим

$$\left|F_1(z)\right| \le \left\|f\right\|_{L_p}\left(\frac{1-e^{-\pi(2n+1)q}}{q(n+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{1-e^{-\pi(2n+1)}} \le \frac{2}{\left(q(n+\frac{1}{2})\right)^{\frac{1}{q}}}\left\|f\right\|_{L_p}. \tag{9}$$

Итак, равномерная ограниченность функции $F_1(z)$ на последовательности границ квадратов установлена в согласии с соотношениями (5) – (9), поэтому в соответствии с формулой Коши (см. [1], с. 434, соотношение 4.1.3) будет справедливо разложение

$$F_1(z) = \frac{F_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{F_k}{z-ki} + \frac{F_{-k}}{z+ki}\right),$$

сходящееся равномерно на компактах, не содержащих полюсов, где коэффициенты F_k суть соответствующие вычеты. В частности

$$\frac{F_0}{2} = \operatorname*{Res}_{z=0} F_1(z) = \lim_{z\to 0} F_1(z)z = \lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^{-2\pi z}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-tz}dt =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi e^{-2\pi z}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-tz}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{f_0}{2}, \tag{10}$$

и при любых k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$F_k = \operatorname*{Res}_{z=ki} F_1(z) = \lim_{z\to ki} F_1(z)(z-ki) =$$

$$= \lim_{z\to ki}\frac{z-ki}{1-e^{-2\pi z}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-tz}dt = \lim_{z\to ki}\frac{1}{2\pi e^{-2\pi z}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = f_k. \tag{11}$$

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено. Более того, найдены коэффициенты F_k разложения (2) и эти коэффициенты совпадают с коэффициентами Фурье для функции $f(t)$.

Теорема 2. Если выполнено условие

$$\frac{|F_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|F_k|^2 + |F_{-k}|^2\right) < \infty, \tag{12}$$

то существует мероморфная функция вида (1), разложение которой по простым дробям совпадает с рядом (2).

Доказательство. В силу условия (12) по теореме Рисса – Фишера существует $f(t) \in L_2[0, 2\pi]$, для которой $\{F_k\}$ будут тригонометрическими коэффициентами Фурье, которые, как установлено соотношениями (10) и (11) при доказательстве теоремы 1, суть коэффициенты в разложении (2).

Замечание 1. Теорема 2 допускает обобщение на случай, если условие (2) заменить на сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(|F_k|^p + |F_{-k}|^p\right)$, $1 < p < 2$.

В дальнейшем нас будут интересовать равномерные и интегральные уклонения функции $F(x)$, $x \in R$, от частных сумм ряда (2)

$$S_n(x) = \frac{f_0}{2} + x\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k}{x-ki} + \frac{f_{-k}}{x+ki}\right) \tag{13}$$

или, более общо, от рациональных функций $R_{2n}(x)$ с простыми полюсами в точках $z = ki$, $k = \overline{-n, n}$, которые являются образами тригонометрических полиномов $\sigma_n(t)$.

Теорема 3. Если $f(t)$ непрерывная 2π-периодическая функция, то справедлива оценка

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-R_{2n}(x)\right|^{p}\frac{dx}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq(\pi)^{\frac{1}{p}}\left\|f(t)-\sigma_{n}(t)\right\|_{C_{2\pi}},1\leq p\leq\infty. \qquad (14)$$

Доказательство. Действительно, при любом $x\in R$ имеем

$$\left|F(x)-R_{2n}(x)\right|=\left|\frac{x}{1-e^{-2\pi x}}\int_{0}^{2\pi}(f(t)-\sigma_{n}(t))e^{-tx}dt\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{x}{1-e^{-2\pi x}}\int_{0}^{2\pi}\left\|f(t)-\sigma_{n}(t)\right\|_{C_{2\pi}}e^{-tx}dt\right|=\left\|f(t)-\sigma_{n}(t)\right\|_{C_{2\pi}}\left|\frac{x}{1-e^{-2\pi x}}\int_{0}^{2\pi}e^{-tx}dt\right|=$$

$$=\left\|f(t)-\sigma_{n}(t)\right\|_{C_{2\pi}}. \qquad (15)$$

Перейдя в левой части (15) к супремуму, придем к соотношению (14) при $p=\infty.$ Если $1\leq p<\infty,$ то неравенство (15) следует возвести в p-ю степень, умножить на вес $(1+x^{2})^{-1}$, проинтегрировать по R и извлечь корень p-й степени. В итоге и получится неравенство (14).

Замечание 2. Из соотношения (13) и неравенства (14) вытекает, в частности, что если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно, то и последовательность $S_{n}(x)$ сходится равномерно на R к функции $F(x)$ с определенной скоростью.

В теории полиномиальной аппроксимации получено множество различных порядковых и асимптотических оценок для уклонений тригонометрических сумм Фурье и методов суммирования, каждая из которых позволяет оценивать уклонения частных сумм ряда (13).

Обозначим через $W_{2\pi}^{r}=\{f(t)\}$ класс 2π-периодических функций на $R,$ у которых существует абсолютно непрерывная производная $f^{(r-1)}(t),\ r\in N,$ и почти всюду $|f^{(r)}(t)|\leq M.$

Теорема 4. Если $f(x)\in W_{2\pi}^{r},$ то для уклонений частной суммы ряда (2) при всех $p,\ 1\leq p\leq\infty,$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-S_{n}(x)\right|^{p}\frac{dx}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{4M}{\pi^{2-\frac{1}{p}}}\frac{\ln n}{n^{r}}+O\left(\frac{1}{n^{r}}\right). \qquad (16)$$

В самом деле, правильность неравенства (16) немедленно устанавливается на основании теоремы 3 и известного асимптотического равенства А.Н. Колмогорова (см., например, [2], с. 281)

$$\sup_{f\in W_{2\pi}^{r}}\left\|f(x)-s_{n}(x)\right\|_{C_{2\pi}}=\frac{4M}{\pi^{2}}\frac{\ln n}{n^{r}}+O\left(\frac{1}{n^{r}}\right).$$

Наряду с классом $W_{2\pi}^{r}$ дифференцируемых 2π-периодических функций будем рассматривать класс $\overline{W}_{2\pi}^{r}$ тригонометрически сопряженных функций и соответствующие мероморфные преобразования таких функций. Пользуясь известными порядковыми оценками для наилучших полиномиальных приближений на этих классах (см., например, [3], с. 240), с помощью неравенства (14) нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5. Если $f(t)\in W_{2\pi}^{r}$ или $f(t)\in\overline{W}_{2\pi}^{r},$ то справедливо порядковое неравенство

$$\inf_{R_{2n}(x)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-R_{2n}(x)\right|^{p}\frac{dx}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\pi^{1+\frac{1}{p}}M}{2n^{r}},\ 1\leq p\leq\infty,$$

где инфимум берется по правильным рациональным функциям с простыми полюсами в точках $(-ki,ki),\ k=\overline{1,n}$.

Через $W_{2\pi}^{r}H^{\alpha}$ обозначаем, как обычно, класс функций, имеющих абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(t),\ r\in N$, и у которых $f^{(r)}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|f^{(r)}(t_{1})-f^{(r)}(t_{2})\right|\leq M\left|t_{2}-t_{1}\right|^{\alpha},\ 0<\alpha\leq1.$$

Теорема 6. Если $f(t)\in W_{2\pi}^{r}H^{\alpha}$, то при всех $p,\ 1\leq p\leq\infty$, выполняется неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-S_{n}(x)\right|^{p}\frac{dx}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{2^{\alpha+1}\ln n}{\pi^{2-\frac{1}{p}}n^{r+\alpha}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t^{\alpha}\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \qquad (17)$$

Доказательство неравенства (17) сводится к применению теоремы 3 и известного результата С.М. Никольского ([2], с. 282) о порядке уклонения частных сумм ряда Фурье на классе $W_{2\pi}^{r}H^{\alpha}$.

Пусть теперь $f(w)$ есть аналитическая в $|w|<1$ и непрерывная в $|w|\le 1$ функция, соответственно $f(e^{i\varphi})$ есть граничное значение аналитической функции с тейлоровским разложением

$$f(w)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} f_k w^k .$$

Тогда соответствующее мероморфное отображение будет иметь вид

$$F(z)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k z}{z-ki}. \qquad (2')$$

Через $B^{(r)}=\{f(w)\}$ обозначаем класс функций $f(w)$, которые в области $|w|<1$ аналитичны и удовлетворяют неравенству $\left|f^{(r)}(w)\right|\le 1$.

Теорема 7. Если $f(w)\in B^{(r)}$, $r\in N$, то при всех p, $1\le p\le\infty$, выполняется порядковое неравенство

$$\inf_{R_n(x)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-R_n(x)\right|^p\frac{dx}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{\pi^{\frac{1}{p}}}{(n+1)n\ldots(n-r+2)},\ n+1\ge r,$$

где инфимум берется по правильным рациональным функциям $R_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k z}{z-ki}$ с простыми полюсами в точках $\{ki\}$.

Доказательство теоремы 7 основано опять-таки на применении теоремы 3 и известного асимптотического равенства К.И. Бабенко (см. [4]) для наилучших полиномиальных приближений функций из класса $B^{(r)}$ в равномерной метрике

$$\sup_{f\in B^{(r)}} E_n(f)=\frac{1}{(n+1)n\ldots(n-r+2)}.$$

Заметим в заключение, что в данной работе продолжены начатые в [5] исследования по мероморфным функциям.

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2 т. М., 1967. Т. 1.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
4. Бабенко К.И. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. № 5. С. 631.
5. Русак В.Н., Филиппова Н.К. // Труды 4-й международной конференции «АМАДЕ». 2006. Т. 1. С. 97.

Поступила в редакцию 11.01.08.

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор.
Игорь Васильевич Рыбаченко – кандидат физико-математических наук, доцент.