

ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ТЕОРЕМЫ ВИРИАЛА ДЛЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ЧАСТОТОЙ

In this paper we consider the difference between the kinetic and potential energy of the time-dependent oscillator in its ground state. The WKB-method and the method connected with the adiabatic corrections calculation are used for our purposes. Both methods are tested on the example permitting the exact analytical solution.

Вириальная теорема для классического осциллятора указывает на равенство кинетической и потенциальной энергии, усредненных по некоторому достаточно большому промежутку времени. Согласно теореме в основном состоянии средние значения потенциальной и кинетической энергии квантового осциллятора равны. Цель статьи – выяснение характера отклонения от теоремы для основного состояния осциллятора с зависящей от времени частотой. Данная задача может иметь приложения в квантовой теории поля [1] в искривленном пространстве-времени, поскольку каждая мода квантового поля представляет собой осциллятор с зависящей от времени частотой [2, 3].

В квантовой теории основное (вакуумное) состояние определяется как наинизшее энергетическое состояние, в котором отсутствуют реальные частицы. Приведенное определение не применимо к осциллятору с зависящей от времени частотой, так как в этом случае энергия не является сохраняющейся величиной и ее наблюдаемое значение зависит от времени. Однако, если существует асимптотическая область, в которой значение частоты становится близким к нулю, то вакуум можно определять адиабатически [2, 3] и затем уточнять поправками к адиабатическому приближению. Далее мы покажем, что разность кинетической и потенциальной энергии в вакуумном состоянии не равна нулю, а точность ее вычисления в значительной степени зависит от способа построения поправок к адиабатическому приближению.

Точное решение уравнения Шрёдингера и ВКБ-поправки. Точное решение уравнения Шрёдингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2(t)q^2}{2} \right) \Psi(q, t), \quad (1)$$

соответствующее вакуумному состоянию, имеет вид

$$\Psi(q, t) = (2\pi)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\bar{u}}} \exp \left(i \frac{\dot{\bar{u}}}{2\bar{u}} q^2 \right),$$

где функция $u(t)$ ($\bar{u}$ обозначает комплексно сопряженную функцию) удовлетворяет уравнению

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (2)$$

и имеет асимптотику $u = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}$ в адиабатической области, которая, как мы будем считать, соответствует $t \rightarrow \infty$. Формальное решение уравнения (2) может быть записано как

$$u = \frac{1}{\sqrt{2W}} \exp \left(-i \int_{-\infty}^t W(\tau) d\tau \right),$$

где $W(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\ddot{W}}{W} - \frac{3}{4} \frac{\dot{W}^2}{W^2} = \omega^2 - W^2.$$

В адиабатическом приближении полагают $W_{\text{WKB}0} = \omega$, в то время как первая ВКБ-поправка дает уточненное значение $W_{\text{WKB}1}^2 = \omega^2 - \left(\frac{1}{4} \frac{\ddot{\omega}}{\omega^2} - \frac{3}{8} \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2} \right)$.

Разность кинетической и потенциальной энергии в вакуумном состоянии осциллятора

$$\sigma(t) = \frac{\int \bar{\Psi}_0 \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} - \frac{\omega^2(t)q^2}{2} \right) \Psi_0 dq}{\int \bar{\Psi}_0 \Psi_0 dq}$$

выражается формулой $\sigma(t) = \frac{1}{4} \partial_t (\bar{u} \dot{u} + u \dot{\bar{u}})$ [4], так что в адиабатическом приближении

$\sigma_{\text{WKB}0} = \frac{2\dot{\omega}^2 - \omega\ddot{\omega}}{8\omega^3}$. Эта величина определяет отклонение от теоремы вириала. Далее можно найти

уточненное выражение для $\sigma(t)$, используя ВКБ-поправку 1-го порядка, однако далее мы покажем, что в некоторых случаях можно получить более точные результаты, если применить метод теории адиабатических возмущений, изложенный в книге Крайнова и Мигдала [5].

Приближенное решение уравнения Шрёдингера. Будем искать решение возмущенного уравнения (1) в виде суммы

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \Psi_n^{(0)}(t) = \sum_n a_n \varphi_n^{(0)}(t) \exp(-i \int E_n^{(0)} dt), \quad (3)$$

где $\varphi_n^{(0)}(t)$ и $E_n^{(0)}(t)$ – собственные значения и функции гамильтониана $H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2(t)q^2}{2}$ при некотором фиксированном t . Коэффициенты разложения $a_n(t)$ также являются функциями времени. Подставляя (3) в (1) и замечая, что функции $\varphi_k^{(0)}$ удовлетворяют уравнению

$$E_n^{(0)}(t) \varphi_k^{(0)} = H \varphi_k^{(0)},$$

получаем

$$i \sum_n \left(\frac{da_n}{dt} \varphi_n^{(0)} + a_n \frac{\partial \varphi_n^{(0)}}{\partial t} \right) \exp(-i \int E_n^{(0)} dt) = 0.$$

Умножая обе стороны неравенства на $\bar{\Psi}_m^{(0)}$ и интегрируя, получаем

$$i \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) a_k, \quad (4)$$

где

$$V_{mk}(t) = -i \int \bar{\varphi}_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial t} \exp(-i \int (E_m^{(0)} - E_k^{(0)}) dt) dq.$$

В момент времени t_0 в качестве волновой функции выберем $\Psi_n^{(0)}$, чему соответствуют значения коэффициентов в (3): $a_n^{(0)} = 1$, $a_k^{(0)} = 0$ при $k \neq n$. Для определения первого приближения ищем a_k в виде $a_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)}$, причем в правую сторону уравнения (4), уже содержащую малые величины V_{mk} , подставляем $a_k = a_k^{(0)}$. Это дает

$$i \frac{da_k^{(1)}}{dt} = V_{kn}(t). \quad (5)$$

Чтобы указать, к какой из невозмущенных функций вычисляется поправка, введем второй индекс у коэффициентов a_k с помощью выражения

$$\Psi_n = \sum_k a_{kn} \Psi_k^{(0)}.$$

Соответственно этому запишем результат интегрирования уравнения (5) в виде

$$a_{kn}^{(1)} = -i \int V_{kn} dt.$$

Этим и определяется волновая функция первого приближения. (Аналогичным образом можно вычислить последующие приближения.)

Поскольку [6]

$$\varphi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \omega q^2\right) H_n(q\sqrt{\omega})$$

и

$$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega,$$

то из всех матричных элементов $V_{m0}(t)$ отличным от нуля остается только $V_{20}(t) = \frac{i\dot{\omega}}{2\sqrt{2}\omega} \exp(2i \int \omega(\tau) d\tau)$.

Это приводит к следующим выражениям для коэффициента $a_{20}^{(1)}$ и волновой функции Ψ_0 :

$$a_{20}^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t \frac{i\dot{\omega}(\eta)}{2\sqrt{2}\omega(\eta)} \exp\left(2i \int_{t_0}^{\eta} \omega(\tau) d\tau\right) d\eta,$$

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega q^2\right) \left[\exp\left(-\frac{1}{2}i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau\right) + a_{20}^{(1)} \frac{(1-2\omega q^2)}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{5}{2}i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau\right) \right]. \quad (6)$$

Используя Ψ_0 , можно найти наблюдаемое значение разности кинетической и потенциальной энергии

$$\sigma(t) = -\left[\frac{a_{20}^{(1)}}{\sqrt{2}} \exp\left(-2i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau\right) + \frac{\bar{a}_{20}^{(1)}}{\sqrt{2}} \exp\left(2i \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau\right) \right] \omega(t). \quad (7)$$

Сравнение приближенных и точных решений. В некоторых случаях возможно получить аналитическое решение и оценить точность описанных приближенных методов. Например, для зависимости частоты от времени $\omega(t) = \sqrt{1 - \frac{\beta}{t^2}}$ ($u(t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} J_{\frac{1}{2\sqrt{1+4\beta}}}(t) - i \frac{\sqrt{\pi t}}{2} Y_{\frac{1}{2\sqrt{1+4\beta}}}(t)$, где $J_v(t)$ и $Y_v(t)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно) выражение для разности кинетической и потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma(t, \beta) = & \frac{\pi}{32t} [J_{-1+\nu}^2(t) - (t+\nu)(t-\nu)J_{\nu}^2(t) - 2tJ_{\nu}(t)J_{\nu+1}(t) + t^2J_{\nu+1}^2(t) + \\ & + 2tJ_{-1+\nu}(t)(J_{\nu}(t) - tJ_{\nu+1}(t)) + t^2Y_{-1+\nu}^2(t) + 2tY_{\nu}(t)Y_{\nu-1}(t) - 4t^2Y_{\nu}^2(t) + \\ & + 4\nu^2Y_{\nu}^2(t) - 2t(tY_{-1+\nu}(t) + Y_{\nu}(t))Y_{1+\nu}(t) + t^2Y_{1+\nu}^2(t)], \quad \nu = \sqrt{\beta + \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

в то время как ВКБ-приближение дает

$$\sigma_{\text{ВКБ0}}(t, \beta) = \frac{3\beta}{8(t^2 - \beta)\sqrt{1 - \frac{\beta}{t^2}}}.$$

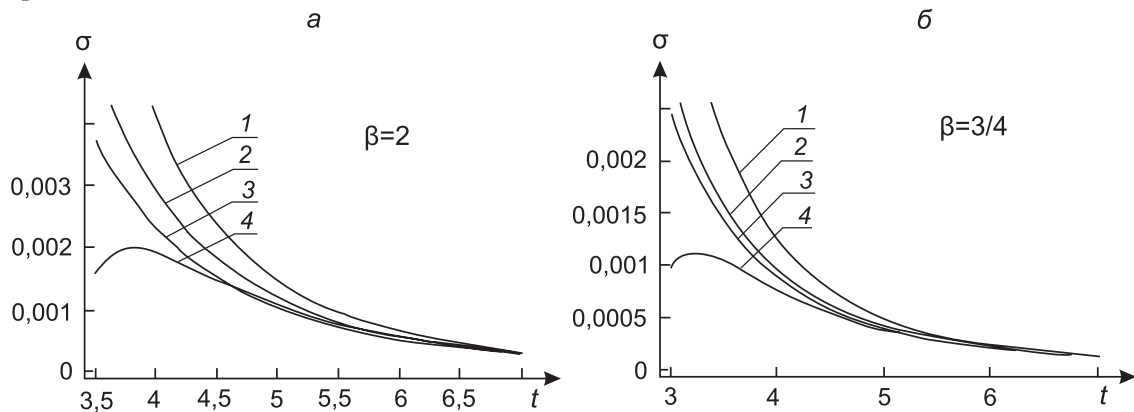
Выражение для $\sigma_{\text{ВКБ1}}(t, \beta)$, которое дает следующая ВКБ-поправка, мы не приводим из-за его громоздкости. Представим выражение для разности кинетической и потенциальной энергии $\sigma_{\text{Ad}}(t, \beta)$, вычисленное по формуле (7):

$$\sigma_{\text{Ad}}(t, \beta) = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{t^2} + 4\cos(2t)\text{Ci}(2t) - 2\sin(2t)(\pi - 2\text{Si}(2t))\right),$$

где для упрощения вычислений положим

$$\int_{-\infty}^t \frac{i\dot{\omega}(\eta)}{2\sqrt{2}\omega(\eta)} \exp\left(2i \int_{-\infty}^{\eta} \omega(\tau) d\tau\right) d\eta \cdot \exp\left(-2i \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau\right) \approx \int_{-\infty}^t \frac{\beta}{2\eta^3} e^{2i\eta} d\eta \cdot e^{-2it}.$$

Интересно отметить, что $\sigma_{\text{Ad}}(t, \beta)$ совпадает с первым слагаемым разложения в ряд Тейлора по β точной функции $\sigma(t, \beta)$, в то время как для $\sigma_{\text{ВКБ0}}(t, \beta)$ это случается только асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Результаты численных расчетов представлены на рисунке. Здесь стоит обратить внимание на то, что при достаточно больших t все же предпочтительным оказывается использование ВКБ-приближения 1-го порядка.



Разность кинетической (а) и потенциальной (б) энергий:

1 – $\sigma_{\text{ВКБ0}}$ (ВКБ-приближение 0-го порядка), 2 – σ (точная зависимость), 3 – σ_{Ad} (адиабатическая теория возмущений), 4 – $\sigma_{\text{ВКБ1}}$ (ВКБ-приближение 1-го порядка)

Таким образом, в данной работе рассмотрены проблемы определения вакуумного состояния осциллятора с зависящей от времени частотой и вычисления разности кинетической и потенциальной

энергии в этом состоянии. Известно, что существующий ВКБ-метод [3] определения вакуумного состояния ограничивает точность получаемых с его помощью результатов. Поэтому волновая функция основного состояния осциллятора (6) была найдена методом адиабатических возмущений, действенность которого продемонстрирована на конкретном примере, имеющем космологические применения [4]. Оказалось, что в некоторых случаях результат вычисления разности кинетической и потенциальной энергии лучше согласуется с точным, аналитическим значением, чем аналогичный, полученный в рамках ВКБ-приближения.

Автор благодарит кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника лаборатории ядерной оптики и космофизики НИИЯП БГУ С.Л. Черкаса за обсуждения и интерес, проявленный к данной работе.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., доп. М., 2005.
2. Бирелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени: Пер. с англ. М., 1984. С. 73.
3. Winitzki S. // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 104011.
4. Cherkas S.L., Kalashnikov V.L. Decelerating and accelerating back-reaction of vacuum to the Universe expansion, arXiv: gr-qc/0604020. P. 5.
5. Мигдал А.Б., Крайнов В.П. Приближенные методы квантовой механики. М., 1966. С. 86.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 4-е изд., испр. М., 1989. С. 91.

Поступила в редакцию 13.03.08.

Сергей Владимирович Анищенко – студент 4-го курса физического факультета.