УДК 519.24

Л.Х. ШОН (ВЬЕТНАМ), Н.Н. ТРУШ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА α-УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

This paper introduces four representations of characteristic function of stable random variables. Corresponding to these representations, we find parameters of stable distributions, that are linear combinations of stable random variables.

Пусть X_1, X_2, ... – независимые, одинаково распределенные случайные величины и X – случайная величина с таким распределением, как и X_j, $j = 1, 2, \ldots$.

Определение. Случайная величина X называется устойчивой, если для каждого $n = 1$, 2, ... найдутся такие константы $c_n > 0$ и $b_n \in R$, что

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} c_n X + b_n ,$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению.

Известно, что устойчивые распределения, за исключением нескольких случаев, не имеют явных выражений плотностей распределения и функций распределения. Однако класс устойчивых распределений довольно просто описывается с помощью характеристических функций. Рассмотрим четыре используемых представления.

Параметризация 1 ([1]). Будем писать, что $X \sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu)$, если характеристическая функция случайной величины X имеет представление

$$\varphi_X(t)=\begin{cases}\exp\{-(\delta|t|)^\alpha[1-i\beta\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}]+i\mu t\} & при \quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{-\delta|t|[1+i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|]+i\mu t\} & при \quad \alpha=1,\end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\mu\in R$, $\delta>0$.

Параметризация 2 ([2]). Будем писать, что $X \sim S_\alpha^{(2)}(\delta,\beta,\mu)$, если характеристическая функция случайной величины X имеет представление

$$\varphi_X(t)=\begin{cases}\exp\{-(\delta|t|)^\alpha[1+i\beta\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}((\delta|t|)^{1-\alpha}-1)]+i\mu t\} & при \quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{-\delta|t|[1+i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln(\delta|t|)]+i\mu t\} & при \quad \alpha=1,\end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\mu\in R$, $\delta>0$.

Параметры в (2) и (1) связаны следующими соотношениями:

$$\beta^{(2)}=\beta^{(1)},\ \delta^{(2)}=\delta^{(1)},\ \mu^{(2)}=\begin{cases}\mu^{(1)}+\beta^{(1)}\delta^{(1)}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} & при \quad \alpha\neq 1,\\ \mu^{(1)}+\beta^{(1)}\delta^{(1)}\frac{2}{\pi}\ln\delta^{(1)} & при \quad \alpha=1.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы указывают на вид параметризации.

Параметризация 3 ([3]). Будем писать, что $X \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda,\beta,\gamma)$, если характеристическая функция случайной величины X имеет представление

$$\varphi_X(t)=\begin{cases}\exp\{\lambda[it\gamma-|t|^\alpha+it|t|^{\alpha-1}\beta\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}]\} & при \quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{\lambda[it\gamma-|t|-it\beta\frac{2}{\pi}\ln|t|]\} & при \quad \alpha=1,\end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\gamma\in R$, $\lambda>0$.

Параметры в (4) связаны с параметрами представления (1) следующим образом:

$$\lambda=(\delta^{(1)})^\alpha,\ \gamma=\frac{\mu^{(1)}}{\lambda},\ \beta^{(3)}=\beta^{(1)}.$$

Параметризация 4 ([4]). Будем писать, что $X \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda,\beta,\gamma)$, если характеристическая функция случайной величины X имеет представление

$$\varphi_X(t)=\begin{cases}\exp\{\lambda[it\gamma-|t|^\alpha\exp(-i\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\operatorname{sign}(t))]\} & при \quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{\lambda[it\gamma-|t|(\frac{\pi}{2}+it\beta\operatorname{sign}(\mathrm{t})\ln|t|)]\} & при \quad \alpha=1,\end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\gamma\in R$, $\lambda>0$, $K(\alpha)=\alpha-1+\operatorname{sign}(1-\alpha)$.

Параметры в (5) связаны с параметрами представления (4) следующим образом:

если $\alpha\neq 1$, то

$$\lambda^{(4)}=\lambda^{(3)}[\cos(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha))]^{-1},\ \gamma^{(4)}=\gamma^{(3)}\cos(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha)),\ \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha))=\beta^{(3)}\operatorname{tg}(\frac{\pi\alpha}{2}),$$

если $\alpha=1$, то

$$\lambda^{(4)}=\frac{2}{\pi}\lambda^{(3)},\ \gamma^{(4)}=\frac{\pi}{2}\gamma^{(3)},\ \beta^{(4)}=\beta^{(3)}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Если* $X_1,\dots,X_n$ *– независимые случайные величины,* $X_j\sim S_\alpha^{(1)}(\delta_j,\beta_j,\mu_j)$, $j=\overline{1,n}$, *то*

$$X_1+X_2+\dots+X_n\sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu),$$

где

$$\delta=(\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_n^\alpha)^{1/\alpha},\ \ \beta=\frac{\beta_1\delta_1^\alpha+\beta_2\delta_2^\alpha+\ldots+\beta_n\delta_n^\alpha}{\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_n^\alpha},\ \ \mu=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n.$$

Доказательство. Когда $k=2$, получим

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\begin{cases}\exp\{-(\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha)|t|^\alpha[1-i\dfrac{\beta_1\delta_1^\alpha+\beta_2\delta_2^\alpha}{\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha}\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}]+i(\mu_1+\mu_2)t\} & \text{для}\quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{-(\delta_1+\delta_2)|t|[1+i(\dfrac{\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2}{\delta_1+\delta_2})\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|]+i(\mu_1+\mu_2)t\} & \text{для}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Из параметризации 1 вытекает, что $X_1+X_2\sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu)$, где

$$\delta=(\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha)^{1/\alpha},\ \ \beta=\frac{\beta_1\delta_1^\alpha+\beta_2\delta_2^\alpha}{\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha},\ \ \mu=\mu_1+\mu_2. \tag{7}$$

Полагаем, что теорема 1 справедлива при $k=n-1$, тогда

$$Z_{n-1}=X_1+X_2+\ldots+X_{n-1}\sim S_\alpha^{(1)}(\delta_0,\beta_0,\mu_0),$$

где

$$\delta_0=(\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_{n-1}^\alpha)^{1/\alpha},\ \ \beta_0=\frac{\beta_1\delta_1^\alpha+\beta_2\delta_2^\alpha+\ldots+\beta_{n-1}\delta_{n-1}^\alpha}{\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_{n-1}^\alpha},\ \ \mu_0=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}.$$

Надо доказать, что теорема 1 справедлива при $k=n$.

Из (7) получаем

$$Z_n=X_1+X_2+\ldots+X_n=Z_{n-1}+X_n\sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu),$$

где

$$\delta=(\delta_0^\alpha+\delta_n^\alpha)^{1/\alpha}=(\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_n^\alpha)^{1/\alpha},\ \ \beta=\frac{\beta_0\delta_0^\alpha+\beta_n\delta_n^\alpha}{\delta_0^\alpha+\delta_n^\alpha}=\frac{\beta_1\delta_1^\alpha+\beta_2\delta_2^\alpha+\ldots+\beta_{n-1}\delta_{n-1}^\alpha}{\delta_1^\alpha+\delta_2^\alpha+\ldots+\delta_{n-1}^\alpha},$$

$$\mu=\mu_0+\mu_n=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n.$$

Теорема доказана.

Если $X\sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu)$, $a\in R$, $a\neq 0$, то aX тоже является α-устойчивой случайной величиной, и ее характеристическая функция имеет представление

$$\varphi_{aX}(t)=\varphi_X(at)=\begin{cases}\exp\{-(|a|\delta|t|)^\alpha[1-i(\beta\operatorname{sign}(a))\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}]+i(a\mu)t\} & \text{для}\quad \alpha\neq 1,\\ \exp\{-(|a|\delta)|t|[1+i(\beta\operatorname{sign}(a))\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|]+i(a\mu-\beta\dfrac{2}{\pi}\delta a\ln|a|)t\} & \text{для}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Следовательно, $aX\sim S_\alpha^{(1)}(\delta_0,\beta_0,\mu_0)$, где

$$\delta_0=|a|\delta,\ \ \beta_0=\beta\operatorname{sign}(a),\ \ \mu_0=\begin{cases}a\mu & \text{для}\quad \alpha\neq 1,\\ a\mu-\beta\dfrac{2}{\pi}\delta a\ln|a| & \text{для}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Обобщая теорему 1, получим следующий результат.

Теорема 2. *Если* X_1, X_2, ..., X_n *– независимые случайные величины,* $X_j\sim S_\alpha^{(1)}(\delta_j,\beta_j,\mu_j)$, $j=\overline{1,n}$, $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *– ненулевой вектор,* $a_j\in R$, $j=\overline{1,n}$, *то*

$$a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n\sim S_\alpha^{(1)}(\delta,\beta,\mu),$$

где

$$\delta=[\sum_{j=1}^n(|a_j|\delta_j)^\alpha]^{1/\alpha},\ \ \beta=\frac{1}{\delta^\alpha}\sum_{j=1}^n\beta_j(|a_j|\delta_j)^\alpha\operatorname{sign}a_j,\ \ \mu=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^n a_j\mu_j & \text{для}\quad \alpha\neq 1,\\ \sum\limits_{j=1}^n a_j\mu_j-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{j=1}^n\beta_j\delta_j a_j\ln(a_j) & \text{для}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Теорема 3. *Если* $X_1,\ldots,X_n$ *– независимые случайные величины,* $X_j\sim S_\alpha^{(2)}(\delta_j,\beta_j,\mu_j)$, $j=\overline{1,n}$, *то*

$$X_1+X_2+\ldots+X_n\sim S_\alpha^{(2)}(\delta,\beta,\mu),$$

где

$$\delta = (\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha)^{1/\alpha}, \ \ \beta = \frac{\beta_1\delta_1^\alpha + \beta_2\delta_2^\alpha + \ldots + \beta_n\delta_n^\alpha}{\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha},$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\mu_j + \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}(\beta\delta - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j) & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j + \frac{2}{\pi}(\beta\delta\ln\delta - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j\ln\delta_j) & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Предполагаем, что $X_j \sim S_\alpha^{(1)}(\delta_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}, \mu_j^{(1)})$, где

$$\delta_j^{(1)} = \delta_j, \ \ \beta_j^{(1)} = \beta_j, \ \ \mu_j^{(1)} = \begin{cases} \mu_j - \beta_j^{(1)}\delta_j^{(1)}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \mu_j - \beta_j^{(1)}\delta_j^{(1)}\frac{2}{\pi}\ln\delta_j^{(1)} & \textit{для} \quad \alpha = 1, \end{cases} \qquad j = \overline{1,n}.$$

Из (3) и теоремы 1 получим, что

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\delta^{(1)}, \beta^{(1)}, \mu^{(1)}),$$

где

$$\delta^{(1)} = (\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha)^{1/\alpha}, \ \ \beta^{(1)} = \frac{\beta_1\delta_1^\alpha + \beta_2\delta_2^\alpha + \ldots + \beta_n\delta_n^\alpha}{\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha}, \ \ \mu^{(1)} = \mu_1^{(1)} + \mu_2^{(1)} + \ldots + \mu_n^{(1)}.$$

Отсюда вытекает, что $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim S_\alpha^{(2)}(\delta, \beta, \mu)$, где

$$\delta = \delta^{(1)} = (\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha)^{1/\alpha}, \ \ \beta = \beta^{(1)} = \frac{\beta_1\delta_1^\alpha + \beta_2\delta_2^\alpha + \ldots + \beta_n\delta_n^\alpha}{\delta_1^\alpha + \delta_2^\alpha + \ldots + \delta_n^\alpha},$$

$$\mu = \begin{cases} \mu^{(1)} + \beta^{(1)}\delta^{(1)}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} = \sum_{j=1}^{n}\mu_j + \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}(\beta\delta - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j) & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \mu^{(1)} + \beta^{(1)}\delta^{(1)}\frac{2}{\pi}\ln\delta^{(1)} = \sum_{j=1}^{n}\mu_j + \frac{2}{\pi}(\beta\delta\ln\delta - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_j\ln\delta_j) & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Если $X \sim S_\alpha^{(2)}(\delta, \beta, \mu)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция aX имеет представление

$$\varphi_{aX}(t) = \begin{cases} \exp\{-(|a|\delta|t|)^\alpha[1 + i(\beta\operatorname{sign}(a))\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}((|a|\delta|t|)^{1-\alpha} - 1)] + i(a\mu)t\} & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \exp\{-|a|\delta|t|[1 + i(\beta\operatorname{sign}(a))\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln(|a|\delta|t|)] + i(a\mu)t\} & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $aX \sim S_\alpha^{(2)}(\delta_0, \beta_0, \mu_0)$, где

$$\delta_0 = |a|\delta, \ \ \beta_0 = \beta\operatorname{sign}(a), \ \ \mu_0 = a\mu .$$

Обобщая теорему 3, получим следующий результат.

Теорема 4. *Если* X_1, X_2, ..., X_n *– независимые случайные величины,* $X_j \sim S_\alpha^{(2)}(\delta_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = \overline{1,n}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *– ненулевой вектор,* $a_j \in R$, $j = \overline{1,n}$, *то*

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n \sim S_\alpha^{(2)}(\delta, \beta, \mu),$$

где

$$\delta = [\sum_{j=1}^{n}(|a_j|\delta_j)^\alpha]^{1/\alpha}, \ \ \beta = \frac{1}{\delta^\alpha}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\operatorname{sign}(a_j)(|a_j|\delta_j)^\alpha,$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_j\mu_j - \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}(\beta\delta - \sum_{j=1}^{n}a_j\beta_j\delta_j) & \textit{для} \ \alpha \neq 1, \\ \sum_{j=1}^{n}a_j\mu_j + \frac{2}{\pi}(\beta\delta\lg\delta - \sum_{j=1}^{n}a_j\beta_j\delta_j\ln(|a_j|\delta_j) & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 5. *Если* $X_1, ..., X_n$ *– независимые случайные величины,* $X_j \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$, *то*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n, \ \beta = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\lambda_j, \ \gamma = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j.$$

Доказательство. Предполагаем, что $X_j \sim S_\alpha^{(1)}(\delta_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}, \mu_j^{(1)})$, где

$$\delta_j^{(1)} = \lambda_j^{1/\alpha}, \ \beta_j^{(1)} = \beta_j, \ \mu_j^{(1)} = \lambda_j\gamma_j, \ j = \overline{1,n}.$$

Из (3) и теоремы 1 имеем: $X_1 + X_2 + ... + X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\delta^{(1)}, \beta^{(1)}, \mu^{(1)})$, где

$$\delta^{(1)} = [\sum_{j=1}^{n}(\delta_j^{(1)})^\alpha]^{1/\alpha} = [\sum_{j=1}^{n}\lambda_j]^{1/\alpha}, \ \beta^{(1)} = \frac{\beta_1(\delta_1^{(1)})^\alpha + ... + \beta_n(\delta_n^{(1)})^\alpha}{(\delta^{(1)})^\alpha} = [\sum_{j=1}^{n}\lambda_j]^{-1}(\beta_1\lambda_1 + ... + \beta_n\lambda_n),$$

$$\mu^{(1)} = \sum_{j=1}^{n}\mu_j^{(1)} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j.$$

Из (5) получим, что $X_1 + X_2 + ... + X_n \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma)$, где

$$\lambda = (\delta^{(1)})^\alpha = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j, \ \gamma = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j, \ \beta = \beta^{(1)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\lambda_j.$$

Теорема доказана.

Если $X \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция aX имеет представление

$$\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at) = \begin{cases} \exp\{(|a|^\alpha \lambda)[it(\frac{a\gamma}{|a|^\alpha}) - |t|^\alpha + it|t|^{\alpha-1}(\beta\operatorname{sign}(a))\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}]\} & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \exp\{|a|\lambda[it(\gamma - \beta\frac{2}{\pi}\lg|a|) - |t| + it(\beta\operatorname{sign}(a))\frac{2}{\pi}\ln|t|]\} & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Справедливо $aX \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0)$, где

$$\lambda_0 = |a|^\alpha \lambda, \ \beta_0 = \beta\operatorname{sign}(a), \ \gamma_0 = \begin{cases} |a|^{-\alpha} a\gamma & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \operatorname{sign}(a)[\gamma - \beta\frac{2}{\pi}\ln|a|] & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Обобщая теорему 5, получим следующий результат.

Теорема 6. *Если* X_1, X_2, ..., X_n $\sim$ *α-устойчивые, независимые случайные величины,* $X_j \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *– ненулевой вектор,* $a_j \in R$, $j = \overline{1,n}$, *то*

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n}|a_j|^\alpha \lambda_j, \ \beta = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\lambda_j\operatorname{sign}(a_j), \ \gamma = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda_j\gamma_j & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda_j(\gamma_j - \beta_j\frac{2}{\pi}\ln|a_j|) & \textit{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 7. *Если* $X_1, ..., X_n$ *– независимые случайные величины,* $X_j \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$, *то*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\lambda = \begin{cases} \{[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\frac{\pi}{2}\beta_jK(\alpha))]^2 + [\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sin(\frac{\pi}{2}\beta_jK(\alpha))]^2\}^{1/2} & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n & \textit{для} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + ... + \lambda_n\gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j,$$

$$\begin{cases} \beta \in [-1;1] \ \textit{так, чтобы} \quad \cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha)) & \textit{для} \ \alpha \neq 1, \\ \beta = \frac{\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_n\beta_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\beta_j & \textit{для} \ \alpha = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Когда $k = 2,$ перепишем характеристическую функцию X_j в виде

$$\ln \varphi_{X_j}(t) = \begin{cases} \lambda_j [it\gamma_j - |t|^\alpha \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + i|t|^\alpha \operatorname{sign}(t)\sin(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))] & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \lambda_j [it\gamma_j - |t|(\frac{\pi}{2} + it\beta_j \operatorname{sign}(t)\ln|t|)] & \textit{для} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$j = 1, 2$.

а) Если $\alpha \neq 1,$ то

$$\ln \varphi_{X_1+X_2}(t) = \ln \varphi_1(t) + \ln \varphi_2(t) =$$

$$= [\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))]\left\{ \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))} it - |t|^\alpha + \right.$$

$$\left. + it|t|^{\alpha-1} \frac{\lambda_1 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))}{\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))} \right\}.$$

Тогда $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)}),$ где

$$\lambda^{(3)} = \lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)), \tag{8}$$

$$\beta^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(3)}}[\lambda_1 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))]\operatorname{cotg}\frac{\pi\alpha}{2}, \tag{9}$$

$$\gamma^{(3)} = \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda^{(3)}}. \tag{10}$$

Из соотношения (6) вытекает, что $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma),$ где

$$\lambda = [\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))][\cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha))]^{-1} = \lambda^{(3)}[\cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha))]^{-1}, \tag{11}$$

$$\gamma = \gamma^{(3)} \cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)), \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \beta^{(3)} tg\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{13}$$

Далее из (8), (9), (11) и (13) имеем, что

$$\lambda \sin(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \lambda^{(3)}\beta^{(3)}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} = \lambda_1 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)). \tag{14}$$

Тогда, используя (11) и (14),

$$\lambda = \{[\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))]^2 + [\lambda_1 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))]^2\}^{1/2}. \tag{15}$$

Из (13) и того, что $\lambda^{(3)}\gamma^{(3)} = \lambda\gamma,$ получим

$$\gamma = \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda}.$$

Учитывая (11), $\beta \in [-1;1]$ так, чтобы

$$\cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \frac{1}{\lambda}[\lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha))].$$

б) Если $\alpha = 1$, то

$$\ln \varphi_{X_1+X_2}(t) = \frac{\pi}{2}(\lambda_1+\lambda_2)[\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2}{\lambda_1+\lambda_2}it - |t| - it\frac{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2}\ln|t|] \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)}),$$

где

$$\lambda^{(3)} = \frac{\pi}{2}(\lambda_1+\lambda_2),\ \beta^{(3)} = \frac{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2}{\lambda_1+\lambda_2},\ \gamma^{(3)} = \frac{2}{\pi}\frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Из соотношения (6) вытекает, что $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma)$,

где

$$\lambda = \frac{2}{\pi}\lambda^{(3)} = \lambda_1+\lambda_2,\ \ \beta = \beta^{(3)} = \frac{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2}{\lambda},\ \ \gamma = \frac{\pi}{2}\gamma^{(3)} = \frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2}{\lambda}.$$

Когда $\alpha = 1$, $K(\alpha) = 0$, при $k = 2$ теорема 7 справедлива.

Полагаем, что теорема 7 справедлива при $k = n-1$, тогда

$$Z_{n-1} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0),$$

где

$$\lambda_0 = \begin{cases} \{[\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))]^2 + [\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\sin(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))]^2\}^{1/2} & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1} & \textit{для} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\ldots+\lambda_{n-1}\gamma_{n-1}}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\gamma_j.$$

$$\begin{cases} \beta_0 \in [-1;1] \ \ \textit{так, чтобы} \quad \cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha)) & \textit{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \beta_0 = \frac{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_{n-1}\beta_{n-1}}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\beta_j & \textit{для} \ \alpha = 1. \end{cases}$$

Надо доказать, что теорема 7 правильна при $k = n$.

Известно, что

$$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = Z_{n-1} + X_n \sim S_\alpha^{(4)}(\delta, \beta, \mu),$$

где,

а) если $\alpha \neq 1$, из (14) и (15) получим, что

$$\lambda = \{[\lambda_0\cos(\frac{\pi}{2}\beta_0 K(\alpha)) + \lambda_n\cos(\frac{\pi}{2}\beta_n K(\alpha))]^2 + [\lambda_0\sin(\frac{\pi}{2}\beta_0 K(\alpha)) + \lambda_n\sin(\frac{\pi}{2}\beta_n K(\alpha))]^2\}^{1/2} =$$

$$= \{[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))]^2 + [\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sin(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))]^2\}^{1/2},$$

$$\gamma = \frac{\lambda_0\gamma_0+\lambda_n\gamma_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\ldots+\lambda_n\gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j;$$

$\beta \in [-1;1]$ так, чтобы

$$\cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \frac{1}{\lambda}[\lambda_0\cos(\frac{\pi}{2}\beta_0 K(\alpha)) + \lambda_n\cos(\frac{\pi}{2}\beta_n K(\alpha))] = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha));$$

б) если $\alpha = 1$, то

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

$$\beta = \frac{\lambda_0\beta_0+\lambda_n\beta_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\ldots+\lambda_n\beta_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\beta_j,$$

$$\gamma = \frac{\lambda_0\gamma_0+\lambda_n\gamma_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\ldots+\lambda_n\gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma_j.$$

Теорема доказана.

Если $X \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция aX имеет представление

$$\ln \varphi_{aX}(t) = \ln \varphi_X(at) =$$

$$= \begin{cases} (|a|^\alpha \lambda)[it(\dfrac{a\gamma}{|a|^\alpha}) - |t|^\alpha + |t|^{\alpha-1}\exp(-i\dfrac{\pi}{2}(\beta \operatorname{sign}(a))K(\alpha)\operatorname{sign}(t))] & \text{для} \quad \alpha \neq 1, \\ (|a|\lambda)\{it\operatorname{sign}(a)[\gamma - \beta \lg|a|] - |t|[\dfrac{\pi}{2} + it(\beta \operatorname{sign}(a))\ln|t|\operatorname{sign}(t)]\} & \text{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $aX \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0)$,

где

$$\lambda_0 = |a|^\alpha \lambda, \;\; \beta_0 = \beta \operatorname{sign}(a), \;\; \gamma_0 = \begin{cases} a\gamma |a|^{-\alpha} & \text{для} \quad \alpha \neq 1, \\ \operatorname{sign}(a)[\gamma - \beta \dfrac{2}{\pi}\ln|a|] & \text{для} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Обобщая теорему 7, получим следующий результат.

Теорема 8. *Если* X_1, X_2, ..., X_n *– независимые случайные величины,* $X_j \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1,n}$, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *– ненулевой вектор,* $a_j \in R$, $j = \overline{1,n}$, *тогда*

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda; \beta; \gamma),$$

где

если $\alpha \neq 1$, *то*

$$\lambda = \{[\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))]^2 + [\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \sin(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha))\operatorname{sign}(a_j)]^2\}^{1/2},$$

$$\beta \in [-1;1] \;\; \textit{так, чтобы} \;\; \cos(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \cos(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha)),$$

$$\gamma = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \gamma_j;$$

если $\alpha = 1$, *то*

$$\lambda = \sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j, \;\; \beta = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \beta_j \operatorname{sign}(a_j), \;\; \gamma = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \gamma_j - \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \beta_j \ln|a_j|.$$

1. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999. С. 178.
2. Borak S., Hgrdle W., Weron R. Stable distribution, SFB 649, Discussion paper, 2005 – 008. Berlin, 2005. P. 1.
3. Nolan J.P. Stable distribution models for heavy tailted data, American University processed, January 11. Boston, 2005. P. 5.
4. Weron R. On the Chambers – Mallows– Stuck method for simulating skewed stable random variables. Statist. Probab. Lett. 28. 1996. P. 165.

Поступила в редакцию 09.06.08.

Ле Хонг Шон – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – Н.Н. Труш.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики.