

ГРУППЫ БРАУЭРА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И СВЯЗАННЫЕ СТРУКТУРЫ

We give a brief survey of recent research of Belorussian mathematicians related to Brauer groups of varieties and their function fields.

Эта статья является кратким обзором исследований белорусских математиков приблизительно в последние 15 лет, связанных с группами Брауэра многообразий и их полями функций. Как самостоятельный объект алгебраические многообразия возникли при формализации основной задачи математики – нахождения решения систем уравнений в различных пространствах: аффинных, проективных, топологических и т. п. Алгебраические многообразия выделяются среди прочих рассмотрением решений систем уравнений алгебраических (к которым в той или иной мере сводятся остальные). В наивной форме зародыши исследований по алгебраическим многообразиям мы находим уже у античных авторов, однако систематическое развитие алгебраической геометрии – области математики с алгебраическими многообразиями в качестве основных объектов изучения – началось лишь ко второй половине XIX в. С этого времени в алгебраической геометрии было открыто громадное количество различных свойств и закономерностей, определяющих структуру многообразий. При этом обилие остающихся нерешенными проблем по-прежнему продолжает привлекать внимание ученых. Основная идея большинства подходов к исследованию алгебраических многообразий – общематематическая и состоит в сопоставлении совокупности более «простых» объектов, отражающих различные свойства

многообразий, для получения информации об этих объектах с тем, чтобы применить эту информацию для установления структурных свойств многообразий. В качестве таких «простых» объектов могут выступать поля определения многообразий, их поля функций, группы Брауэра соответствующих полей, группы Брауэра – Гротендика, группы R -эквивалентностей. Идея использования групп Брауэра состоит в следующем. Каждому алгебраическому многообразию сопоставляется подходящая абелева группа (как уже отмечалось, группа Брауэра – Гротендика и в более широком контексте – группа Брауэра подходящего поля).

Главным образом обзор концентрируется вокруг следующих тем:

- группы Брауэра: кручение и закон взаимности;
- индексы центральных простых алгебр;
- относительные группы Брауэра;
- группы Витта и Шафаревича – Тэйта, принцип Хассе;
- расслоения на многообразия Севери – Брауэра;
- числа Пифагора, u -инварианты, гипотеза Пфистера;
- группы Уайтхеда и R -эквивалентностей.

Что касается основ, относящихся к определениям и классическим фактам, мы отсылаем читателей к работам [1, 2]. Повсюду далее F , k и K обозначают поля.

Группы Брауэра: кручение и закон взаимности

Пусть X – гладкая проективная кривая над k , $K=k(X)$ – ее поле функций. Для замкнутой точки $x \in X$ через $k(x)$ будем обозначать ее поле вычетов. Известно, что неразветвленная группа Брауэра $\text{Br}_n k(X)$ совпадает с группой Брауэра кривой $\text{Br}(X)$. Кроме того, имеет место следующий комплекс:

$$0 \longrightarrow \text{Br}(X) \longrightarrow \text{Br } k(X) \xrightarrow{\text{ram}} \bigoplus_{x \in X} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Sigma} H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

где ram – гомоморфизм ветвления, а гомоморфизм Σ есть сумма гомоморфизмов коограничения. Этот комплекс, вообще говоря, не является точной последовательностью, однако в некоторых случаях это так. Например, когда X – проективная прямая $\mathbb{P}^1$, имеем следующую точную последовательность (закон взаимности Д.К. Фаддеева):

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } k(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\text{ram}} \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Sigma} H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Будем говорить, что элемент из $\bigoplus_{x \in X} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ удовлетворяет закону взаимности, если он принадлежит ядру $\ker(\Sigma)$. Как уже отмечалось, совпадение $\text{im}(\text{ram}) = \ker(\Sigma)$ не всегда имеет место. Группа $\Delta = \ker(\Sigma)/\text{im}(\text{ram})$ называется препятствием к выполнимости закона взаимности.

Пусть далее k – числовое поле и $(\rho_i: k \rightarrow R)$ – множество вещественных точек поля k . Пусть также X/k – гладкая проективная кривая и $X_i/R = X \times_k^{\rho_i} R$. В работе [3] показано, что $\Delta \cong (Z/2Z)^{r_1 + r_2 + \dots + r_s - s}$, где r_i – число связных компонент у $X_i(R)$. В случае эллиптической кривой этот результат был доказан ранее в [4] (см. также [5, 6]). Таким образом, была вскрыта причина отклонения от выполнимости закона взаимности. Для установления предыдущего факта важную роль сыграла следующая

Теорема [7]. Пусть k – числовое поле, являющееся подполем в R , X – гладкое k -многообразие, $\dim X > 0$. Пусть также U открыто в $X(R)$ в смысле вещественной топологии. Тогда U содержит бесконечно много точек x таких, что степень $|k(x):k|$ конечна и нечетна и содержит бесконечно много точек x таких, что степень $|k(x):k|$ конечна и четна.

Группы $\text{Br}(X)$ алгебраических многообразий X являются одними из их наиболее важных бирациональных инвариантов. Исследование $\text{Br}(X)$ имеет важные приложения в бирациональной геометрии многообразия X . Однако непосредственное вычисление этого инварианта в случае произвольного многообразия X представляется малореальной задачей. В случае специальных многообразий и специальных полей определения эта проблема является очень важной и интересной с точки зрения приложений в арифметической геометрии, теории простых центральных алгебр, теории квадратичных форм и т. д. Отметим работу [8], в которой были вычислены образующие и соотношения в 2-кручении групп Брауэра гиперэллиптических кривых над произвольными полями характеристики, отличной от 2 (см. также [9, 10]).

Традиции локально-глобального принципа предполагают изучение глобальной ситуации предварением исследования всех локальных, т. е. групп $\text{Br}(X_v)$ для всех нормирований v поля k , где k_v – пополнение поля k по нормированию v и $X_v = X \times_k k_v$. Таким образом, большое значение имеет исследование групп Брауэра полей рациональных функций кривых, определенных над полными полями.

Даже в случае кривых C (многообразий размерности 1) проблема полного описания группы $\mathrm{Br}(C)$ является очень трудной. Под «полным описанием» понимается представление элементов группы $\mathrm{Br}(C)$ соответствующими центральными простыми алгебрами с делением, т. е. описание всех неразветвленных алгебр над полем $k(C)$.

Первый нетривиальный пример (в смысле рода кривой) представляют собой эллиптические кривые. Однако и в этом случае возникающие результаты сильно зависят от поля k определения кривых. Хорошо известна структура $\mathrm{Br}(C)$ в случае $k = \mathbb{C}$ [11] и для k вещественно замкнутого [12, 13].

Заметим, что так как $\mathrm{Br}(C)$ является абелевой и периодической группой, то основная проблема ее описания – описание ее m -кручения для любого целого положительного $m > 1$. Кроме того, среди подгрупп кручения можно выделить группу 2-кручения ввиду ее тесной связи с теорией квадратичных форм. Следует также отметить, что при исследовании m -кручения групп $\mathrm{Br}(C)$ важную роль играют два фактора: во-первых, взаимная простота m с характеристикой поля вычетов основного поля k и, во-вторых, тип редукции кривой. Ряд важных результатов получен в случае локальных кривых [14–21].

Отметим также работы [22, 23], в которых получено описание неразветвленных элементов экспоненты 2 групп Брауэра полей функций специальных кривых.

Индексы центральных простых алгебр

Важным направлением в теории групп Брауэра является изучение зависимости индекса от экспоненты. Хорошо известно, что для $a \in \mathrm{Br} K$ экспонента $\exp(a)$ является делителем индекса $\mathrm{ind}(a)$, а классический результат Брауэра утверждает, что $\mathrm{ind}(a)$ и $\exp(a)$ имеют одинаковые наборы простых делителей. К сожалению, никакие общие соотношения (кроме упомянутых) здесь места не имеют, поскольку зависимость между экспонентой и индексом причудливо меняется с изменением K . В этой ситуации естественным является конкретизация задачи о нахождении соотношений между экспонентами и индексами: *пусть задан некоторый класс полей, необходимо найти зависимость между экспонентами и индексами элементов групп Брауэра полей этого класса.*

Такой подход позволил получить ряд важных и глубоких результатов. Например, известно, что в случае класса полей конечных (или более общо – C_1 -полей) $\exp(a) = \mathrm{ind}(a)$ (это классические теоремы Веддербарна и Тзена).

Локальная и глобальная теории полей классов показывают, что предыдущее равенство имеет место и в случае классов локальных и глобальных полей. Совпадение экспоненты и индекса установлено недавно также и в случае полей как повторных, так и двойных формальных степенных рядов с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле (см. [24]) как часть общей гипотезы о совпадении экспоненты и индекса элементов групп Брауэра над C_2 -полями. Отметим также недавние работы А. Де Йонга [25] и М. Либиха [26], в которых показано, что для полей функций поверхностей над алгебраически замкнутыми полями экспоненты алгебр совпадают с их индексами.

Однако еще в первой половине XX в. [27] было установлено, что экспонента не всегда совпадает с индексом и потому ответ на вопрос об их зависимости не может быть выражен в терминах теоремы о совпадении. В то же время рассмотрение полей рациональных функций от бесконечного числа переменных показывает, что в классе таких полей при фиксированной экспоненте могут существовать элементы произвольно большого индекса. Наконец, если рассматривать поля функций K на алгебраических многообразиях, определенных над произвольным полем k , то тот же эффект неограниченности индексов при фиксированной экспоненте может возникать из-за элементов группы $\mathrm{Br} k$. Таким образом, если интересоваться проблемой ограниченности индексов при фиксированной экспоненте для класса полей функций на алгебраических многообразиях, являющегося во многих отношениях одним из наиболее важных классов полей, то естественно в качестве полей определения таких многообразий рассматривать поля k , в которых соответствующая проблема ограниченности индексов имеет положительное решение. Яркий пример плодотворности такого подхода – недавний результат Д. Солтмэна [28], показавшего, что если K – поле функций на гладкой проективной кривой с полем p -адических чисел в качестве поля определения, то для любого натурального n взаимно простого с p при $\exp(a) = n \cdot \mathrm{ind}(a)$ является делителем n^2 , причем эта оценка не может быть усилена в том смысле, что существуют алгебры экспоненты n и индекса n^2 .

Все же, если поле k достаточно произвольно, трудно ожидать получения оценок такого точного типа. До недавнего времени одним из основных методов получения оценок индексов в общей ситуации являлся метод «контролируемого» расширения скаляров, убивающего ветвление с последующей оценкой индексов неразветвленных элементов. На этом последнем этапе важное значение имеет результат М. ван ден Берга [29], дающий оценку индексов для неразветвленных элементов.

К этому направлению примыкает результат из [30], относящийся к классу чисто трансцендентных расширений K конечной размерности над так называемыми $P_{n,r}$ -полями и показывающий, что индексы элементов соответствующих групп Брауэра зависят только от поля определения, экспоненты и ветвления заданного элемента. В [30] (см. также [31]) показано, что на самом деле индекс элемента зависит не от ветвления в данной точке, а лишь от самой точки, в которой этот элемент ветвится. Этот результат позволяет получить оценки для индексов лучшие, чем оценки, возникающие из упомянутого результата М. ван ден Берга.

Отметим также результат, в котором получены формулы редукции индекса и экспоненты.

Пусть C – гиперэллиптическая кривая над недиадическим локальным полем k , заданная уравнением $y^2 = \pi f(x)$, где $f(x)$ – унитарный многочлен четной степени с коэффициентами в кольце целых O_k поля k и π – его простой элемент. Пусть также D – центральная k -алгебра с делением индекса i , $n = \text{ord}_2(i)$ и $m = \text{ord}_2(\text{НОД}\{\deg f_i\})$, где $\{f_i\}$ – множество всех неприводимых делителей многочлена $f(x)$ над $O_k[x]$.

В [32] получены следующие формулы редукции индекса и экспоненты:

$$\text{ind}(D_i \otimes_k k(C)) = \begin{cases} \text{ind}(D_i), & \text{если } n=0 \text{ или } n > m, \\ \text{ind}(D_i)/2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\text{exp}(D_i \otimes_k k(C)) = \begin{cases} \text{exp}(D_i), & \text{если } n=0 \text{ или } n=0, \\ \text{exp}(D_i)/2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Среди результатов по формулам редукции индекса отметим также полученные недавно в [33].

Относительные группы Брауэра

Для расширения полей L/K гомоморфизм расширения скаляров центральных простых K -алгебр до L индуцирует естественным образом гомоморфизм $\phi_{L/K} : \text{Br } K \rightarrow \text{Br } L$, ядро которого $\text{Br}(L/K)$ обычно называется относительной группой Брауэра расширения L/K . Важность понятия «относительная группа расширения» состоит в том, что элементы относительной группы Брауэра описывают все центральные простые K -алгебры, для которых L является полем расщепления. Общая проблема описания полей расщепления заданной центральной простой K -алгебры (по крайней мере в такой постановке: заданы центральная простая K -алгебра A и расширение L/K , определить, является ли L полем расщепления для A) в настоящее время далека от своего решения. Все же для конечных (или более общо – алгебраических) расширений L/K она решена во многих классических случаях. Так, для локальных и глобальных полей описание полей расщепления без труда получается с помощью локальной и глобальной теорий полей классов. Гораздо более сложным является случай трансцендентных расширений. Здесь очевидное наблюдение позволяет редуцировать общую задачу к ситуации конечнопорожденных расширений L/K , которые, в свою очередь, могут быть интерпретированы как поля функций на алгебраических многообразиях (возможно, над конечным расширением поля K). Таким образом, ниже мы будем предполагать, что $L = K(X)$ – поле функций на гладком алгебраическом K -многообразии X . Возвращаясь к случаю относительных групп Брауэра, отметим (чтобы в дальнейшем исключить из рассмотрения) простой случай, когда группа $\text{Br}(L/K)$ тривиальна. Последнее имеет место всегда, когда многообразие X обладает K -рациональной точкой. Итак, далее мы будем предполагать, что X таковой не обладает. Для многообразий произвольной размерности в настоящее время имеются лишь отдельные результаты, и даже в случае кривых задача полностью не решена. Для кривых рода нуль она впервые рассматривалась Э. Виттом [34]. В общей ситуации, когда X – кривая, задача рассматривалась П. Рокеттом, предложившим в случае, когда $K(X)$ сепарабельно порождено над K , некоторый кохомологический инвариант, позволяющий редуцировать вычисление группы $\text{Br}(K(X)/K)$ к вычислению всех групп $\text{Br}(K(X)_p/K)$, где p – точка поля $K(X)/K$ с алгебраичным над K образом $K(X)_p$ [35].

Нетрудно видеть, что группы $\text{Br}(K(X)/K)$ в значительной мере зависят от основного поля K . С точки зрения арифметики основными являются случаи, когда поле K либо локально, либо глобально. В случае локальных числовых полей K имеется редукция вычисления $\text{Br}(K(X)/K)$ к вычислению индекса кривой X .

Теорема (П. Рокетт [35], С. Лихтенбаум [36]). Пусть K – локальное поле. Тогда $\mathrm{Br}(K(X)/K) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, где d – наименьшее натуральное число, являющееся степенью дивизора $K(X)$ над K (т. е. индекс кривой X равен порядку группы $\mathrm{Br}(K(X)/K)$).

Заметим, что в случае локального поля в силу $\mathrm{Br} K \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ этим утверждением однозначно описывается не только порядок группы $\mathrm{Br}(K(X)/K)$, но и все центральные простые K -алгебры, представляющие все элементы этой группы. В случае глобального основного поля ситуация гораздо сложнее, и здесь имеются лишь отдельные результаты для специальных кривых [37, 38].

В работах [39–41] эти результаты обобщены для кватернионов, определенных над специальными полями. Наконец, отметим, что в несколько более общей ситуации проблема вычисления индексов рассматривалась Я. ван Геелом и В.И. Янчевским [42–44], получившими важные результаты для гиперэллиптических кривых.

Группы Витта и Шафаревича – Тэйта, принцип Хассе

В исследовании глобальных алгебраических многообразий важную роль играют также группы Шафаревича – Тэйта и группы Витта. Причем последние аналогично группам Брауэра – Гротендика во многих случаях могут отождествляться с подгруппами Витта полей функций соответствующих алгебраических многообразий. С этой точки зрения исследование групп Витта полей функций является весьма важным. Фундаментальную роль в исследовании глобальных многообразий играет принцип Хассе или отклонение от его выполнимости. Р. Паримала установила совпадение 2-кручения группы Шафаревича – Тэйта с группой, измеряющей отклонение от выполнимости принципа Хассе для групп Витта полей функций алгебраических многообразий.

Пусть k – глобальное поле ($\mathrm{char} k \neq 2$), X – гладкая проективная геометрически целая кривая над k с k -рациональной точкой. Обозначим через J_X якобиан и ${}_2\mathrm{Ш}(J_X)$ – 2-кручение группы Шафаревича – Тэйта якобиана J_X . Через $P(k)$ будет обозначаться множество точек, а через k_v – пополнение поля k в точке $v \in P(k)$. Положим $X_v = X \times_k k_v$. Тогда $k(X)$ и $k_v(X)$ будут обозначать поля функций на X и X_v соответственно. В [45] доказано, что ядро естественного гомоморфизма $\alpha: W(k(X)) \rightarrow \prod_{v \in P(k)} W(k_v(X))$

изоморфно ${}_2\mathrm{Ш}(J_X)$ (здесь для произвольного поля F $W(F)$ обозначает группу Витта квадратичных форм над F).

Определение. Говорят, что для группы Витта поля $k(X)$ выполнен принцип Хассе, если гомоморфизм α инъективен.

В случае кривых X нулевого рода в [46] установлена тривиальность ядра гомоморфизма α , а в случае анизотропных коник в [45] был построен пример, показывающий, что принцип Хассе в этом случае не имеет места. Следующий (в смысле рода кривой) важный случай – случай эллиптических кривых. Там же [45] было показано, что для эллиптических кривых E над k принцип Хассе, вообще говоря, не имеет места.

Пусть $E/\mathbb{Q}$ – эллиптическая кривая, определенная уравнением $y^2 = x^3 + px$, где p – простое число такое, что $p \equiv 1 \pmod{8}$ и для степенного вычета $(\bar{p})_4$ четвертой степени $(\bar{p})_4 \neq 1$. В [45] доказано, что группа $\ker(\alpha)$ состоит из следующих классов форм Пфистера $\langle\langle 1, -x \rangle\rangle$, $\langle\langle -1, -x \rangle\rangle$, $\langle\langle 2, -2 \rangle\rangle$ и $\langle\langle -2, -x \rangle\rangle$.

В работе [47] установлен принцип Хассе для $W(k(E))$ в случае другого класса эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$. Этот результат получен с помощью доказательства тривиальности группы ${}_2\mathrm{Ш}(E)$, которая интерпретируется как ядро гомоморфизма ${}_2\mathrm{Br} E \rightarrow \prod_{v \in P(k)} {}_2\mathrm{Br} E_v$, где ${}_2\mathrm{Br} E$, ${}_2\mathrm{Br} E_v$ – 2-кручение

групп Брауэра кривых E и E_v соответственно.

Теорема. Пусть $E/\mathbb{Q}$ – эллиптическая кривая, определенная уравнением $y^2 = x^3 - px$, где p – простое число такое, что $p \equiv 3 \pmod{8}$. Тогда ${}_2\mathrm{Ш}(E) = \{0\}$.

Укажем на параллелизм результатов о принципах Хассе для групп $W(k(X))$ и $\mathrm{Br} k(X)$ в случае проективной прямой $\mathbb{P}_k^1$. Действительно, в [48] была установлена инъективность гомоморфизма $\mathrm{Br} k(X) \rightarrow \prod_{v \in P(k)} \mathrm{Br} k_v(X)$ в случае, когда $X = \mathbb{P}_k^1$. Позже Дж. Сонн в [49] обобщил этот результат на

случай проективного пространства $\mathbb{P}_k^n$. В случае же анизотропных коник над k эти результаты расходятся, как показывает следующее обобщение основного результата из [48].

Предложение [47]. Пусть C – коника, определенная над числовым полем k . Тогда гомоморфизм $\beta: \text{Br } k(C) \rightarrow \prod_{v \in P(k)} \text{Br } k_v(C)$ инъективен.

Расслоения на многообразия Севери – Брауэра

Для расслоений на многообразия Севери – Брауэра существует старая проблема их реализации по системам локальных инвариантов. В двумерном случае более точно проблема состоит в следующем: для заданного набора пар точка – элемент первой группы когомологий, удовлетворяющего закону взаимности, установить существование расслоения на коники, для которого заданное множество пар является системой его локальных инвариантов. В работе [50] эта проблема решена с помощью ее редукции к соответствующей проблеме в группах Брауэра. При этом рассматривались различные как поля определения, так и системы локальных инвариантов. Упомянутая редукция состоит в установлении существования центральных простых алгебр с заданной системой локальных инвариантов.

Отметим, что понятие фаддеевских индексов центральных простых алгебр играет важную роль в получении этих результатов, которые привели к неожиданному взгляду на другую старую проблему – о цикличности алгебр с делением над полем функций проективной плоскости над замкнутым полем. Было установлено, что если эти алгебры ветвятся в квартиках, то они цикличны и имеет место совпадение экспоненты и индекса [51]. Это обобщает результаты Т. Форда, Б. Джейкоба и М. ван ден Берга [52–56].

Проблема существования расслоений на коники со специальными системами локальных инвариантов была положительно решена в работе [57] в случае гензелевых дискретно нормированных полей с вещественно замкнутым полем вычетов. При этом ключевую роль сыграл переход к эквивалентной задаче о центральных простых алгебрах экспоненты 2.

С этими результатами теоретически согласуется также полученный критерий вещественности полей функций обобщенных многообразий Севери – Брауэра, определенных над вещественными полями [58]. Отметим также структурный результат, касающийся поведения центральных простых алгебр после регулярных расширений центра: для центральной простой алгебры A над полем k и коммутативной группы G порядка, равного степени алгебры, доказано существование регулярного расширения E/k , сохраняющего индексы k -алгебр, и такого, что над E алгебра A изоморфна скрещенному произведению с группой G [59].

Числа Пифагора, u -инварианты, гипотеза Пфистера

Пусть K – поле, $\sum K^2$ – совокупность элементов K , представимых в виде сумм квадратов элементов из K^* . Минимальное натуральное $p(K)$ (если оно существует) такое, что произвольный элемент $a \in \sum K^2$ есть сумма не более чем $p(K)$ квадратов, называется числом Пифагора поля K . Вычисление $p(K)$ для произвольного поля – сложная задача. В настоящее время имеется большое количество публикаций, связанных с вычислением $p(K)$ (см., например, [60–65]).

Напомним, что вещественное поле называется пифагоровым, если $p(K)=1$, и наследственно пифагоровым, если пифагоровым является любое вещественное алгебраическое расширение поля K . Наследственно пифагоровы поля интенсивно изучались в 1970-х гг. (см., например, [66–69]).

Наибольший интерес представляют поля функций алгебраических многообразий (более специальный случай – алгебраических кривых), с полями определения для которых числа Пифагора уже известны. Задача нахождения числа Пифагора поля K может быть в некоторых случаях сведена к исследованию 2-кручений группы Брауэра ${}_2\text{Br } K$.

В работе [70] вычислены числа Пифагора полей функций коник, определенных над наследственно пифагоровыми полями.

Теорема. Пусть k – наследственно пифагорово поле, C – коника над k с полем функций $k(C)$. Предположим, что $k(C)$ вещественно, тогда $p(k(C))=2$.

Теорема. Пусть k – наследственно пифагорово поле и $k(C)$ не вещественно. Тогда $p(k(C))=2$, если $|\text{Br } (k(\sqrt{-1})/k)|=2$, и $p(k(C))=3$, если $|\text{Br } (k(\sqrt{-1})/k)|>2$.

Переход к полям функций кривых рода 1 более сложен. В этом направлении имеются следующие результаты.

Теорема [71]. Пусть E – эллиптическая кривая с хорошей редукцией, заданная над полем вещественных формальных степенных рядов $R((t))$. Тогда число Пифагора ее поля функций равно двум.

Для гиперэллиптической кривой C с хорошей редукцией над полем вещественных формальных степенных рядов $R((t))$ в [72] показано, что число Пифагора поля функций $R((t))(C)$ равно 2, если поле функций вещественно, в противном случае число Пифагора равно 3. Доказательство основано на исследовании 2-кручения группы Брауэра кривой C . Одно из следствий этого результата состоит в том, что u -инвариант поля $R((t))(C)$ равен 4 при условии вещественности поля. Вычисление чисел Пифагора не только само представляет большой интерес, но и его многочисленные приложения.

Отметим тесную связь между числом Пифагора $p(K)$ и другим важным инвариантом поля K – u -инвариантом. Понятие u -инварианта важно не только в теории квадратичных форм, но также в алгебраической геометрии и алгебраической K -теории. Однако получение общих результатов об u -инвариантах всегда сопряжено с большими трудностями. Это относится и к их вычислению для ряда важных в алгебраической геометрии полей. Например, длительное время не поддававшаяся решению проблема И. Капланского о возможных значениях u -инвариантов $u(K)$ при изменении поля K была решена А.С. Меркурьевым с использованием глубоких результатов из алгебраической K -теории.

Ярким примером, позволяющим оценить сложность общей проблемы вычисления u -инвариантов, является до сих пор не доказанная гипотеза Пфистера об u -инвариантах специальных полей.

Гипотеза (Пфистер [73]). Пусть F – расширение степени трансцендентности m некоторого вещественно замкнутого поля. Тогда $u(F) \leq 2^m$.

Формально относящаяся к теории квадратичных форм, эта гипотеза имеет алгебро-геометрическую интерпретацию и является очень важной с точки зрения проблемы существования рациональных точек на многообразиях квадрик. До сих пор гипотеза Пфистера остается недоказанной даже в случае полей функций поверхностей. Сложность этой гипотезы и важность ее алгебро-геометрических применений обуславливает актуальность ее проверки в случае чисто трансцендентных расширений степени один с локальными полями в качестве констант. В работах [74–78] установлена справедливость этой гипотезы в случае специальных локусов.

Еще одним нетривиальным результатом, связанным с центральными простыми алгебрами над полями с малым u -инвариантом, является результат из [79], дающий критерий их цикличности. В качестве следствия из него выводится справедливость гипотезы о цикличности алгебр над C_2 -полями, частный случай которой ранее был установлен Ростом, Серром, Тиньоле и (независимо) Роуэном.

Группы Уайтхеда и R -эквивалентностей

Пусть G – односвязная простая алгебраическая F -группа и $G(F)$ – группа F -рациональных точек группы G . Обозначим через $G(F)^+$ подгруппу группы $G(F)$, порожденную F -точками унипотентных радикалов параболических F -подгрупп группы G (что совпадает с группой, порожденной всеми унипотентными элементами из $G(F)$). $G(F)^+$ – нормальная подгруппа в $G(F)$; она проективно проста. Факторгруппа $W(G(F)) = G(F)/G(F)^+$, названная Титсом группой Уайтхеда группы G , имеет большое значение при изучении нормальной структуры группы $G(F)$. Вычислению групп Уайтхеда посвящено много исследований. Одним из последних является работа [80], где изучена тривиальность групп Уайтхеда для классических групп.

В качестве поля F в [80] рассматривается поле виртуальной когомологической размерности $\text{vcd}(F)$, не превосходящей 2. Напомним, что когомологическая размерность $\text{cd}(F)$ поля F определяется как когомологическая размерность его абсолютной группы Галуа G_F . Определим виртуальную когомологическую размерность поля F согласно формуле $\text{vcd}(F) = \text{cd}(F(\sqrt{-1}))$. В [80] сначала доказывается, что приведенная группа Уайтхеда (соответственно приведенная унитарная группа Уайтхеда и спинорная группа Уайтхеда) и группа $\text{SK}_1(D)$ (соответственно $\text{SK}_1\text{U}(D)$ и $\text{K}_1\text{Spin}(D)$) для таких групп $G(F)$ тривиальны. Затем эти результаты применяются к изучению групп Уайтхеда $W(G(F))$ и групп $G(F)/R$ классов R -эквивалентностей групп $G(F)$ с использованием известного факта, что во многих случаях существуют изоморфизмы между приведенными группами Уайтхеда $W(G(F))$ и $G(F)/R$.

Наконец, отметим результат из [81], сводящий рассмотрение гипотезы А.А. Суслина о приведенной группе Уайтхеда к алгебрам специального вида.

1. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М., 1986.
2. Pfister A. Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology. LMS Lecture Note Series 217. Cambridge, 1995.
3. Гулецкий В.И., Янчевский В.И. // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. Вып. 5. С. 210.
4. Гулецкий В.И., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 1995. Т. 39. № 5. С. 8.
5. Guletskii V.I., Yanchevskii V.I. // Comm. Algebra. 2000. Vol. 28. № 4. P. 1657.

6. Гулецкий В.И., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 1996. Т. 40. № 2. С. 14.
7. Гулецкий В.И., Янчевский В.И. // Там же. 1999. Т. 43. № 5. С. 30.
8. Rehmann U., Tikhonov S.V., Yanchevskii V.I. // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29. № 9. P. 3971.
9. Гулецкий В.И., Марголин Г.Л., Янчевский В.И. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 6. С. 8.
10. Гулецкий В.И., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 2. С. 52.
11. Tsen C. // Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1933. Bd. 48. P. 335.
12. Knebush M. // Math. Z. 1976. Bd. 150. P. 49.
13. Knebush M. // Idid. Bd. 151. P. 189.
14. Васюк Г.Б., Янчевский В.И. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40. № 6. С. 31.
15. Гоглев В.В., Янчевский В.И. // Весці АН Беларусі. 1996. № 3. С. 59.
16. Гоглев В.В., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 2. С. 5.
17. Гоглев В.В., Янчевский В.И. // Там же. 1999. Т. 43. № 1. С. 5.
18. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Там же. 1998. Т. 42. № 1. С. 50.
19. Янчевский В.И., Марголин Г.Л. // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. Вып. 3. С. 200.
20. Янчевский В.И., Марголин Г.Л. // Там же. Вып. 6. С. 227.
21. Янчевский В.И. // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. Теория чисел, алгебра и алгебр. геометрия. М., 1995. Т. 208. С. 350.
22. Rehmann U., Margolin G., Yanchevskii V. // J. Math. Sci. (New York). 2000. Vol. 102. № 3. P. 4071.
23. Rehmann U., Margolin G., Yanchevskii V. Algebraic K-theory and its applications (Trieste, 1997). New York, 1999. P. 503.
24. Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M., Parimala R. // Prépublication d'Orsay, 2000-40.
25. De Jong A.J. // Duke Math. J. 2004. Vol. 123. № 1. P. 71.
26. Lieblich M. // Compos. Math. 2008. Vol. 144. № 1. P. 1.
27. Brauer R. // Math. Zeitschrift. 1929. Bd. 31. P. 733.
28. Saltman D.J. // J. Ramanujan Math. Soc. 1997. Vol. 12. № 21. P. 25.
29. Van den Bergh M. // Ph. D. thesis. Antwerpen, 1985.
30. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 125.
31. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 4. С. 16.
32. Янчевский В.И. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 1. С. 16.
33. Krashen D., Lieblich M. // Int. Math. Res. Not. 2008.
34. Witt E. // Math. Zeitschrift. 1935. Vol. 39. P. 462.
35. Roquette P. // Nagoya Math. J. 1966. Vol. 27. P. 625.
36. Lichtenbaum S. // Invent. Math. 1969. Vol. 7. P. 120.
37. Han I. // Communication in Algebra. 2003. Vol. 31. P. 4301.
38. Shick J. // Contemp. Math. 1994. Vol. 155. P. 389.
39. Прокопчук А.В., Янчевский В.И. // Тр. Ин-та математики. 2005. Т. 13. № 2. С. 60.
40. Прокопчук А.В., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси 2006. Т. 50. № 4. С. 11.
41. Прокопчук А.В., Янчевский В.И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 5. С. 5.
42. Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse. 1999. Vol. 8. P. 155.
43. Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Manuscr. Math. 1998. Vol. 96. P. 317.
44. Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Bull. Belg. Math. Soc. 2003. Vol. 10. P. 345.
45. Parimala R., Sujatha R. // Duke Math. J. 1996. Vol. 85. P. 555.
46. Colliot-Thélène J.-L., Coray D., Sansuc J.-J. A. // J. Reine Angew. Math. 1980. Bd. 320. S. 150.
47. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 1. С. 21.
48. Янчевский В.И. // Там же. 1986. Т. 30. № 3. С. 201.
49. Sonn J. // J. Algebra. 1990. Vol. 131. № 2. P. 631.
50. Kunyavskii B.E., Rowen L.H., Tikhonov S.V., Yanchevskii V.I. // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358. № 6. P. 2579.
51. Kunyavskii B.E., Rowen L.H., Tikhonov S.V., Yanchevskii V.I. // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 134. № 4. P. 921.
52. Van den Bergh M. // Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants. (Reims, 1995). Paris, 1997. Vol. 2. Soc. Math. P. 43.
53. Ford T.J. // New York J. Math. 1995. Vol. 1. P. 178.
54. Ford T.J. // Algebr. Represent. Theory. 2003. Vol. 6. P. 501.
55. Ford T.J. // J. Pure Appl. Algebra. 2004. Vol. 188. P. 117.
56. Jacob B. // Pac. J. Math. 1981. Vol. 93. P. 95.
57. Bazyleu D.F., Tikhonov S.V., Yanchevskii V.I. // Algebra Discrete Math. 2004. № 1. P. 1.
58. Тихонов С.В. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52. № 1. С. 5.
59. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2008. Т. 256. С. 179.
60. Cassels W.S., Ellison W.J., Pfister A. // J. Number Theory. 1971. Vol. 3. P. 125.
61. Prestel A. // J. Reine Angew. Math. 1978. Bd. 303/304. S. 284.
62. Pourchet Y. // Acta Arithmetica. 1971. Vol. 19. P. 89.
63. Hsia J.H., Johnson R. // Am. J. Math. 1974. Vol. 96. P. 448.
64. Scheiderer C. // Trans. Am. Math. Soc. 2000. Vol. 352. P. 1039.
65. Scheiderer C. // J. Reine Angew. Math. 2001. Bd. 540. P. 205.
66. Becker E. Hereditarily-Pythagorean fields and orderings of higher level. Monografias de Mathematica 2. Rio de Janeiro, 1978.
67. Becker E. // Bull. Am. Math. Soc. 1978. Vol. 84. P. 278.

68. Jacob B. // Pac. J. Math. 1981. Vol. 93. P. 95.
69. Bröcker L. // Math. Z. 1976. Bd. 151. S. 149.
70. Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 2. С. 5.
71. Липницкий А.А., Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Там же. 2004. Т. 48. № 3. С. 38.
72. Tikhonov S.V., Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Manuscripta Math. 2006. Vol. 119. № 3. P. 305.
73. Pfister A. // Contemp. Math. 1982. Vol. 8. P. 249.
74. Bazyleu D.F., Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Comm. Algebra. 2008. Vol. 36. № 9. P. 3353.
75. Bazyleu D.F., Van Geel J., Yanchevskii V.I. // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2007. Vol. 14. № 1. P. 51.
76. Базылев Д.Ф., ван Геел Я., Янчевский В.И. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 2. С. 14.
77. Базылев Д.Ф., ван Геел Я., Янчевский В.И. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 1. С. 19.
78. Базылев Д.Ф., ван Геел Я., Янчевский В.И. // Там же. 2002. Т. 46. № 6. С. 21.
79. Янчевский В.И. // Там же. 2007. Т. 51. № 5. С. 39.
80. Yanchevskii V.I. // Algebraic groups and arithmetic. Tata Inst. Fund. Res. Mumbai, 2004. P. 491.
81. Прокопчук А.В., Тихонов С.В., Янчевский В.И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 3. С. 35.

Поступила в редакцию 22.11.08.

Сергей Викторович Тихонов – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики НАН Беларуси.

Вячеслав Иванович Янчевский – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики, заведующий отделом алгебры Института математики НАН Беларуси.