УДК 512.542

Р.В. БОРОДИЧ, М.В. СЕЛЬКИН

К ТЕОРЕМЕ Л.А. ШЕМЕТКОВА

The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are investigated.

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является классической задачей. Начало этой теории восходит к работе Фраттини 1885 г. [1]. Полученные в ней результаты в дальнейшем развивались многими авторами (см. [2]). Одна из задач данного направления – исследование свойств пересечений максимальных подгрупп и влияние этих свойств на строение группы. Л.А. Шеметков [3] доказал классическую теорему о формационном строении нормальной подгруппы N группы G, для которой $N/N\cap\Phi(G)\in\mathfrak{I}$. Этот результат стал открытием целого направления: исследование поведения обобщенно нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях. Сформулированная задача в некоторых конкретных случаях рассматривалась в работах М.В. Селькина [2], А. Баллестера-Болинше [4], Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] и других авторов. Д. Бейдлеманом и Ш. Смитом [5] был поставлен следующий вопрос: «Пусть H – субнормальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу $\Phi(G)$. Будет ли H сверхразрешимой, если сверхразрешима группа $H/\Phi(G)$?» Настоящая работа развивает исследования в данном направлении с помощью теории формаций и подгрупповых функторов.

Напомним, что подгрупповым m-функтором Θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G [2]. При этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha)=(\Theta(G))^\alpha$ для любого автоморфизма α группы G.

Согласно [2] m-функтор Θ называется регулярным, если выполняются условия:

1) из $N\triangleleft G$ и $M\in\Theta(G)$ следует $MN/N\in\Theta(G/N)$;

2) из $M/N\in\Theta(G/N)$ следует $M\in\Theta(G)$.

В дальнейшем m-функтор Θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G. Если m-функтор Θ выделяет в группе G все максимальные подгруппы, то такой m-функтор будем называть тривиальным.

Пусть Θ – некоторый m-функтор. Напомним, что Θ-подгруппой Фраттини $\Phi_\Theta(G)$ называется пересечение максимальных Θ-подгрупп группы G.

Через $\Phi^{\mathfrak{I}}_\Theta(G)$ обозначим подгруппу, равную пересечению $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп. Если m-функтор Θ выделяет в группе G все абнормальные подгруппы, то подгруппу $\Phi^{\mathfrak{I}}_\Theta(G)$ будем обозначать $\Phi^{\mathfrak{I}}_\Delta(G)$. Если m-функтор Θ является тривиальным, то подгруппа $\Phi^{\mathfrak{I}}_\Theta(G)$ совпадает с подгруппой $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$, строение которой изучалось в работах многих авторов.

Через $\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta_\pi}(G)$ обозначим подгруппу, равную пересечению максимальных $\mathfrak{I}$-абнормальных Θ-подгрупп, с индексами, делящимися на числа из π. Если m-функтор Θ выделяет в группе G все абнормальные подгруппы, то подгруппу $\Phi_{\Theta_\pi}(G)$ будем обозначать $\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Delta_\pi}(G)$. В случае, когда m-функтор Θ является тривиальным, то подгруппу $\Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta_\pi}(G)$ будем обозначать $\Phi^{\mathfrak{I}}_\pi(G)$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Напомним, что, если $\mathfrak{I}$ – непустая формация, то подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{I}$-достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H=H_0\subseteq H_1\subseteq\ldots\subseteq H_n=G,$$

что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{I}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{I}$-субнормальной.

Понятие $\mathfrak{I}$-достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация, Θ – абнормально полный регулярный т-функтор, K – некоторая нормальная подгруппа группы G. Если каждая максимальная Θ-подгруппа группы G, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной, то справедливы следующие утверждения:*

1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$;

2) $K/K \cap \Phi_{\Theta}(G) \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(G/K \cap \Phi_{\Theta}(G))$.

Доказательство. Очевидно, $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех максимальных Θ-подгруппах, содержащих $G^{\mathfrak{F}}$ и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, а следовательно, в $\Phi_{\Theta}(G)$.

Пусть R/S – главный фактор группы G, причем

$$R \subseteq K, S \supseteq K \cap \Phi_{\Theta}(G).$$

Так как

$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S,$$

то имеем G-изоморфизм

$$RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}R/(R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R/S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R/S.$$

Так как $G/SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G/SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R/S $\mathfrak{F}$-централен в G. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, Θ – абнормально полный регулярный т-функтор, H – подгруппа группы G. Тогда $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$, если выполняется одно из следующих условий:*

1) H – субнормальная подгруппа и $H/H \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$;

2) H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $H/H \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$;

3) H – нормальная π-подгруппа группы G, $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация и $H/H \cap \Phi_{\Theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. 1) Пусть $D = H \cap \Phi_{\Theta}(G)$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 1 работы [7] подгруппа H представима в виде $H = H_1 \times H_2$, где H_1 – холловская π-подгруппа из H. Так как $H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$, то $H/D \simeq H_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = H_1 \cap \Phi_{\Theta}(G)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $H_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 1 из [10] и лемму 4.5 из [3], получаем

$$(H_1/D_1)/F_p(H_1/D_1) = H_1/D_1/F_p(H_1)/D_1 \simeq H_1/F_p(H_1) \in f(p).$$

Поскольку последнее справедливо для любого $p \in \pi(H_1)$, то по лемме 4.5 из [3] подгруппа H_1 входит в $\mathfrak{F}$.

2) Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то она, очевидно, G_{π}-достижима в G, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.4.12 из [2] подгруппа $H\Phi_{\Theta}(G)/\Phi_{\Theta}(G)$ G_{π}-достижима в группе $G/\Phi_{\Theta}(G)$. Значит, на основании работы [6] имеем

$$H\Phi_{\Theta}(G)/\Phi_{\Theta}(G) \subseteq O_{\pi}(G/\Phi_{\Theta}(G)).$$

Пусть $O_{\pi}(G/\Phi_{\Theta}(G)) = K/\Phi_{\Theta}(G)$. По теореме 2 работы [7] подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 – π-группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \varnothing$, $K_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$. Пусть H_1 – холловская π-подгруппа группы H, H_2 – холловская π'-подгруппа группы H. Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем H_1 – π-группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа T такая, что из $T/T \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – π-группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \varnothing$, $T_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H, имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_{\pi}(G) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как

$$H\Phi_{\Theta}(G)N/\Phi_{\Theta}(G)N \simeq H\Phi_{\Theta}(G)/H\Phi_{\Theta}(G) \cap \Phi_{\Theta}(G)N,$$

то $H\Phi_{\Theta}(G)N/\Phi_{\Theta}(G)N \in \mathfrak{I}$. В то же время $H\Phi_{\Theta}(G)N/\Phi_{\Theta}(G)N \simeq HN/HN \cap \Phi_{\Theta}(G)N$. Поэтому $HN/HN \cap \Phi_{\Theta}(G)N \in \mathfrak{I}$.

Так как $\Phi_{\Theta}(G)N/N \subseteq \Phi_{\Theta}(G/N)$, то $(HN/N)/(HN/N) \cap \Phi_{\Theta}(G/N) \in \mathfrak{I}$.

Кроме того, на основании леммы 2.4.12 из [2] подгруппа HN/N $\mathfrak{I}$-достижима в группе G/N. Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N/N \in \mathfrak{I}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично доказывается, что $H_1L/L \in \mathfrak{I}$. Отсюда следует, что

$$H_1/L \cap N \simeq H_1 \in \mathfrak{I}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $N \subseteq \Phi_{\Theta}(G) \cap O_{\pi}$ следует, что N – абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{I})$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $HN/N \in \mathfrak{I}$. Если N не содержится в H, то $|G:HN|<|G:H|$. Кроме того, $HN/HN \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{I}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN \in \mathfrak{I}$. Так как формация $\mathfrak{I}$ является наследственной, то $H \in \mathfrak{I}$. Снова пришли к противоречию. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.4.12 из [2] подгруппа H $\mathfrak{I}$-достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = HO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{I}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}.

Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{I}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i. По теореме 4.7 из [3] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{I}} \subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i)$, то

$$H_i/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) \simeq H_{i-1}/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому

$$(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i).$$

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \qquad (*)$$

Согласно лемме 4.5 из [3] для любого $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)}/(H_j)^{\mathfrak{I}} \subseteq O_{p'p}(H_j/(H_j)^{\mathfrak{I}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [3] $f(p) = N_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)}/(H_j)^{\mathfrak{I}} \subseteq O_{p'}(H_j/(H_j)^{\mathfrak{I}}).$$

Так как $H_jO_j(G)/O_p(G) \in \mathfrak{I}$, то $(H_j)^{\mathfrak{I}} \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)_{p'}^{f(p)}(H_j)^{\mathfrak{I}},$$

где $(H_j)_{p'}^{f(p)}$ – холловская p'-подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства $(*)$ следует, что холловская p'-подгруппа $(H_{i-1})_{p'}^{f(p)}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p'-подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})_{p'}^{f(p)}(H_i)^{\mathfrak{I}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{I}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа $(H/N)^{f(p)} = H^{f(p)}N/N$ является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H/N \in \mathfrak{I}$, то

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H/N).$$

Из субнормальности $(H/N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H/N)^{f(p)} O_p(G/N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$HO_p(G)/H^{f(p)}O_p(G) \simeq H/H \cap H^{f(p)}O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G)/N)/O_{p'p}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

На основании теоремы 4.1 из [3] это означает, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$ содержатся в $O_p(G)/N$ и являются $\mathfrak{I}$-центральными. Поэтому из $HO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{I}$ следует, что $HO_p(G)/N \in \mathfrak{I}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{I}$-достижима в группе G. Так как

$$|G : HO_p(G)| < |G : H|,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{I}$. Из наследственности формации $\mathfrak{I}$ следует, что $H \in \mathfrak{I}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть φ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G/\Phi_{\Theta}(G)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi_{\Theta}(G) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \varphi^{-1}(O_p(G^{\varphi}))$ – полный прообраз подгруппы $O_p(G^{\varphi})$. На основании теоремы 2 из [7] подгруппа S представима в виде $S = S_1\Phi_{\Theta}(G)$, где S_1 – холловская p'-подгруппа группы S. Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^{\varphi}) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^{φ} являются p-группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^{φ}. Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{I}$. Тогда $K = K^{\mathfrak{I}}$. Так как подгруппа H^{φ} $\mathfrak{I}$-достижима в G^{φ}, то на основании работы [8] получаем, что $K \subseteq N_{G^{\varphi}}(H)$. Значит, $K \cap H^{\varphi}$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^{\varphi})^{\mathfrak{I}} = K \cap H^{\varphi}$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^{\varphi})^{\mathfrak{I}} \subseteq (H^{\varphi})^{\mathfrak{I}}$. Теперь из $H^{\varphi} \in \mathfrak{I}$ следует, что $K \cap H^{\varphi} = 1$. Значит, $KH^{\varphi} = K \times H^{\varphi}$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{I}$. Предположим, что K не содержится в H^{φ}. Так как подгруппа H^{φ} $\mathfrak{I}$-достижима в $H^{\varphi}K$, то существует такая цепь

$$H^{\varphi} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = H^{\varphi}K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{I}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. В частности, либо подгруппа H^{φ} нормальна в группе H_1, либо $(H_1)^{\mathfrak{I}} \subseteq H^{\varphi}$.

Пусть $(H_1)^{\mathfrak{I}} \subseteq H^{\varphi}$. Так как $H^{\varphi}K/K \in \mathfrak{I}$, то $(H^{\varphi}K)^{\mathfrak{I}} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{I}$ имеем $(H_1)^{\mathfrak{I}} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{I}$-достижима в $H^{\varphi}K$, то ввиду леммы 1 $(H_1)^{\mathfrak{I}}$ – субнормальная подгруппа группы $H^{\varphi}K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times \ldots \times K_n$, где K_i –

изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\Im}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, ..., n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^{\Im} = K_1 \times ... \times K_m$, где $k < m$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^{φ}, содержащаяся в $(H_1)^{\Im}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^{\varphi}K$. Так как $L \subseteq H^{\varphi}$, то

$$H^{\varphi}K = H^{\varphi}(LC_K(L)) = H^{\varphi}C_K(L) = H^{\varphi}C_{H^{\varphi}K}(L).$$

Поэтому

$$H^{\varphi}K/C_{H^{\varphi}K}(L) = H^{\varphi}C_{H^{\varphi}K}(L)/C_{H^{\varphi}K}(L) \simeq H^{\varphi}/H^{\varphi} \cap C_{H^{\varphi}K}(L) = H^{\varphi}/C_{H^{\varphi}}(L).$$

Так как $H^{\varphi} \in \Im$, то $H^{\varphi}/C_{H^{\varphi}}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^{\varphi}K/C_{H^{\varphi}K}(L) \in f(L)$, т. е. L – $\Im$-центральный главный фактор группы $H^{\varphi}K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – $\Im$-центральный главный фактор группы H_1. Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\Im}$ следует, что все H_1-главные факторы группы $(H_1)^{\Im}$ $\Im$-центральны в H_1. Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\Im$. Так как подгруппа H_1 $\Im$-достижима в H_1K, а подгруппа $H_1K = H^{\varphi}K$ $\Im$-достижима в G^{φ}, то H_1 – $\Im$-достижимая подгруппа группы G^{φ}. Пусть $\varphi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1. Тогда $\varphi^{-1}(H_1)$ – $\Im$-достижимая подгруппа группы G, $\varphi^{-1}(H_1)/\Phi_{\Theta}(G) \in \Im$ и $|G : \varphi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем $\varphi^{-1}(H_1) \in \Im$. Так как формация $\Im$ наследственна, то $H \in \Im$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^{φ} нормальна в H. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1/H^{φ} – простая группа. Предположим, что $(H_1)^{\Im} H^{\varphi}$. Тогда

$$H_1 = H^{\varphi}(H_1)^{\Im} = H^{\varphi}(K_1 \times ... \times K_m).$$

Так как

$$H_1/H^{\varphi} \simeq K_1 \times ... \times K_m/K_1 \times ... \times K_m \cap H^{\varphi},$$

то из $K \in \Im$ следует, что $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\varphi}$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\varphi}$. Как было показано ранее, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H.

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^{φ}, то либо $K = K^{\varphi}$ и $[K, H^{\varphi}] = 1$, либо $K \in \Im$ и $K \subseteq H^{\varphi}$. Если $K = K^{\Im}$, то, очевидно, $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Пусть $K \in \Im$, тогда $K \subseteq H^{\varphi}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p-группами, либо pd-группами, то из $K \subseteq H^{\varphi}$ снова получаем $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(Soc(G^{\varphi})).$$

Так как $\Phi_{\Theta}(G^{\varphi}) = 1$, то $Soc(G^{\varphi}) = \tilde{F}_{\Theta}(G^{\varphi})$. По теореме 1 из [11]

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq F(G^{\varphi}) = O_p(H^{\varphi}).$$

Значит, $O_p(H^{\varphi}) = 1$.

Так как $H^{\varphi} \in \Im$, то ввиду леммы 4.5 [3] из условия $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H^{\varphi}/O_p(H^{\varphi}) \in f(p)$. Так как $O_p(H^{\varphi}) = 1$, то $H^{\varphi} = H/\Phi_{\Theta}(G) \in f(p)$. Теперь из $\Phi_{\Theta}(G) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\varphi} \in \Im$. Снова пришли к противоречию.

3) Пусть G – контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется.

Если $H \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G) = 1$, то теорема верна. Пусть K – минимальная инвариантная в G подгруппа, отличная от 1, содержащаяся в $H \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G)$. Так как $H/K/H/K \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G/K) =$ $= H/K/H/K \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G)/K = H/K/H \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G)/ \cong H/H \cap \Phi^{\Im}_{\Theta_{\pi}}(G) \in \Im$, то для фактор-группы G/K теорема справедлива, т. е. $H/K \in \mathfrak{F}$. Если $K \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$, то по теореме 1 из [10] подгруппа H принадлежит $\mathfrak{F}$, что противоречит предположению. Значит, K не содержится в $\Phi_{\Theta}(G)$.

Если предположить, что всякая максимальная Θ-подгруппа группы G, не содержащая подгруппу K, является $\mathfrak{F}$-нормальной, то, использую лемму 1, получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Снова противоречие. Следовательно, в группе G существует такая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная Θ-подгруппа M, что $G = MK$. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq H$, что противоречит предположению. Поэтому подгруппа M не принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как K – π-подгруппа, то M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная Θ-подгруппа группы G, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, индекс которой в G есть π-число, откуда следует, что $K \subseteq H$. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Следствие 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* Θ *– абнормально полный регулярный* m*-функтор. Если* N *– субнормальная подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\Theta(G)$ – N-абнормальный m-функтор, тогда имеет место следующее

Следствие 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ *– локальная формация. Если* H *– субнормальная подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если* H *– субнормальная подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда m-функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы, из теоремы 1 получаем результат М.В. Селькина из [2].

Следствие 1.4. Пусть $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* Θ *– абнормально полный регулярный* m*-функтор. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\Theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп, имеет место

Следствие 1.5. Пусть $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 1.6. Пусть $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 1.7. Пусть $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* Θ *– абнормально полный регулярный* m*-функтор. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Если m-функтор выделяет в любой группе все абнормальные максимальные подгруппы, то получаем

Следствие 1.8. Пусть $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

В случае, когда m-функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы, то из теоремы 1 получаем результат М.В. Селькина из [2].

Так как $\mathfrak{I}$-субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{I}$-достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 1 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

Следствие 1.9. Пусть $\mathfrak{I}$ *– нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* Θ *– абнормально полный регулярный* m*-функтор. Если* H *– нормальная* π*-подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta_\pi}(G) \in \mathfrak{I}$, *то* $H \in \mathfrak{I}$.

Если Θ – тривиальный функтор, то из следствия 1.9 вытекают соответствующие результаты работ [2, 12, 13].

Если $\pi = P$, то получаем

Следствие 1.10. Пусть $\mathfrak{I}$ *– нормально наследственная локальная формация,* Θ *– абнормально полный регулярный* m*-функтор. Если* H *– нормальная подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi^{\mathfrak{I}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{I}$, *то* $H = H_1 \times H_2$, *где* $H_1 \in \mathfrak{I}$, $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$.

1. Frattini G. // Atti Acad. Dei Lincei. 1885. Vol. 1. P. 281.
2. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн., 1997.
3. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М., 1978.
4. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M.D. // Glasgow Math. J. 1994. Vol. 36. P. 241.
5. Beidleman J.C., Smith H. On Frattini-like subgroups // Ibid. 1993. Vol. 35. P. 95.
6. Kegel O. // Arch. Math. 1978. Vol. 30. № 2. P. 225.
7. Бородич Е.Н., Селькин М.В. // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 5 (38). С. 11.
8. Авдашкова Л.П., Каморников С.Ф. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 1. С. 33.
9. Schmid P. // Arch. Math. 1972. Vol. 23. № 3. P. 236.
10. Бородич Е.Н., Бородич Р.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 3. С. 47.
11. Селькин М.В., Бородич Р.В. // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. № 2 (47). С. 177.
12. Ведерников В.А., Дука Н.Г. // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Гомель, 1968. С. 44.
13. Шлык В.В. // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 3. С. 429.

Поступила в редакцию 27.05.08.

Руслан Викторович Бородич – кандидат физико-математических наук, начальник научно-исследовательского сектора ГГУ им. Ф. Скорины.

Михаил Васильевич Селькин – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ГГУ им. Ф. Скорины.