УДК 519.24

Т.В. СОБОЛЕВА

ПЕРВЫЕ ДВА МОМЕНТА ПЕРИОДОГРАММЫ УСТОЙЧИВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

According to the observations of the considered field, the Fourier transformation and a reciprocal modified periodogram used for the reciprocal spectrum estimation are constructed. The mean and variance of the reciprocal periodogram have been obtained.

В настоящее время большое внимание уделяется спектральному анализу устойчивых стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, особенностью которых является отсутствие моментов второго, а иногда и первого порядка. Как известно, построение состоятельных оценок спектральных плотностей представляет собой основную задачу в статистическом спектральном анализе устойчивых временных рядов. В качестве основы для построения таких оценок являются модифицированное конечное преобразование Фурье и модифицированная периодограмма. В работах [1, 2] приведены результаты, касающиеся исследования статистических свойств оценок взаимных спектральных плотностей многомерных устойчивых случайных процессов. В данной статье рассмотрим r-мерное действительное устойчивое однородное случайное поле $X^r(t)=\left\{X_a(t),\ a=\overline{1,r}\right\}$, $t=(t_1,...,t_n)\in R^n$, $r\geq 1$. В случае $\alpha=2$ поле $X^r(t)$, $t\in R^n$, $r\geq 1$, является r-мерным гауссовским случайным полем. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\alpha\in(0,2)$.

Спектральное представление составляющей $X_a(t)$, $a=\overline{1,\ r}$, случайного поля $X^r(t)$, $t\in R^n$, $r\geq 1$, имеет вид

$$X_a(t)=\int\limits_{R^n}\cos(<\lambda,t>)d\xi_a(\lambda),$$

где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$, $<\lambda,t>$ – скалярное произведение векторов, $\xi_a(\lambda)$ – составляющая действительного α-устойчивого однородного случайного поля $\xi^r(\lambda)=\left\{\xi_a(\lambda),\ a=\overline{1,r}\right\}$, $\lambda\in R^n$, $r\geq 1$, с такими независимыми приращениями, что

$$\left\{E\left|d\xi_a(\lambda)d\xi_b(\lambda)\right|^{p/2}\right\}^{\alpha/p}=C(p,\alpha)f_{ab}(\lambda)d\lambda,$$

для всех $0<p<\alpha<2$, причем $C(p,\alpha)$ зависит от α, p и не зависит от $\xi_a(\lambda)$ и $\xi_b(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$. Функция $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in R^n$, является интегрируемой и называется взаимной спектральной плотностью составляющих $X_a(t)$ и $X_b(t)$ поля $X^r(t)$, $t\in R^n$.

Аналогично [3, 4] рассмотрим функции

$$H_a(\lambda)=H_a\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}...\int\limits_{-1}^{1}h_a\left(t_1,...,t_n\right)\cos\left(\lambda_1t_1+...+\lambda_nt_n\right)dt_1...dt_n=\int\limits_{[-1,1]^n}h_a(t)\cos(<\lambda,t>)dt \quad (1)$$

и

$$H_a^{(T)}(\lambda)=H_a^{(T_1,...,T_n)}\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=$$
$$=\int\limits_{-T_1}^{T_1}...\int\limits_{-T_n}^{T_n}h_a\left(\frac{t_1}{T_1},...,\frac{t_n}{T_n}\right)\cos\left(\lambda_1t_1+...+\lambda_nt_n\right)dt_1...dt_n=\int\limits_{\mathrm{T}^n}h_a^{(T)}\left(t\right)\cos(<\lambda,t>)dt, \quad (2)$$

где $\lambda\in R^n$, $h_a\left(\dfrac{t}{T}\right)=h_a^{(T)}(t)$, $t\in R^n$, – окно просмотра данных, $\mathrm{T}^n=\left[-T_1,T_1\right]\times...\times\left[-T_n,T_n\right]$, $T_j\in R_+=\left(0,+\infty\right)$, $j=\overline{1,n}$. Функция $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in R^n$, называется частотным окном, особенностью поведения которого является то, что оно становится все более сконцентрированным в окрестности нуля при $\min\limits_{j=\overline{1,n}}T_j\to\infty$. Для функции $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in R^n$, справедливо следующее равенство:

$$H_a^{(T_1,...,T_n)}\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=\left(\prod_{j=1}^{n}T_j\right)H_a\left(T_1\lambda_1,...,T_n\lambda_n\right). \quad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$H_{ab}^{(T)}(\lambda)=A_{ab}^{(T)}\left|H_a^{(T)}(\lambda)H_b^{(T)}(\lambda)\right|^{1/2}, \quad (4)$$

где

$$A_{ab}^{(T)}=\left(\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}T_i\right)^{1-\alpha}}{B_{ab}^{(\alpha)}}\right)^{1/\alpha}, \quad (5)$$

$$B_{ab}^{(\alpha)}=\int\limits_{R^n}\left|H_a(\lambda)H_b(\lambda)\right|^{\alpha/2}d\lambda, \quad (6)$$

а $H_a(\lambda)$, $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in R^n$, заданы равенствами (1) и (2) соответственно, $\alpha\in\left(0,2\right)$.

Пусть $X_a(t),\ t \in \mathrm{T}^n,\ a = \overline{1,\ r},$ – реализация составляющей $X_a(t),\ t \in R^n,\ a = \overline{1,\ r},$ рассматриваемого поля $X^r(t),\ t \in R^n$.

Определение 1. Модифицированным конечным преобразованием Фурье, построенным по реализациям $X_a(t)$ и $X_b(t),\ t \in \mathrm{T}^n,$ будем называть статистику вида

$$d_a^{(T)}(\lambda) = A_a^{(T)} l_a^{(T)}(\lambda),$$

где

$$l_a^{(T)}(\lambda) = Q(\lambda) \int_{\mathrm{T}^n} h_a^{(T)}(t) X_a(t) \cos(<\lambda, t>) dt, \tag{7}$$

$$Q(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-1/\alpha}, & \lambda \neq 0,\ 0 < \alpha \leq 1, \\ 2^{-1/\alpha}, & \lambda \neq 0,\ 1 < \alpha \leq 2, \\ 2^{1-2/\alpha}, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{8}$$

а $A_a^{(T)} = \left(\dfrac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} T_i \right)^{1-\alpha}}{\int_{R^n} \left| H_a(\lambda) \right|^{\alpha} d\lambda} \right)^{1/\alpha}$.

Определение 2. Взаимной модифицированной периодограммой реализации $X_a(t),\ t \in \mathrm{T}^n,$ будем называть статистику вида

$$I_{ab}^{(T)}(\lambda) = k(p,\alpha) \left| A_{ab}^{(T)} \left| l_a^{(T)}(\lambda) l_b^{(T)}(\lambda) \right|^{1/2} \right|^{p}, \tag{9}$$

где

$$k(p,\alpha) = \frac{D(p)}{F(p,\alpha) c_\alpha^{p/\alpha}}, \tag{10}$$

$$F(p,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{-1-p} \left(1 - \exp\{-|u|^{\alpha}\} \right) du, \tag{11}$$

$$D(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{|u|^{1+p}} du, \tag{12}$$

$$c_\alpha = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \left(\alpha \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right)^{-1} > 0, \tag{13}$$

$0 < p < \alpha < 2$, а $A_{ab}^{(T)},\ l_a^{(T)}(\lambda),\ \lambda \in R^n,$ определены соотношениями (5) и (7) соответственно.

Введем следующее обозначение:

$$H_{ab}^{(T)}(x,y) = A_{ab}^{(T)} \left| H_a^{(T)}(x) H_b^{(T)}(y) \right|^{1/2}, \tag{14}$$

где $x,\ y \in R^n$, а $A_{ab}^{(T)}$ задана соотношением (5). Заметим, что $H_{ab}^{(T)}(x,x) = H_{ab}^{(T)}(x)$, где $H_{ab}^{(T)}(x)$ определена равенством (4).

Приведем без доказательства следующий результат.

Лемма 1. Для статистики $l_a^{(T)}(\lambda),\ \lambda \in R^n,$ определенной соотношением (7), справедливо равенство

$$E \exp\left\{ ir A_{ab}^{(T)} \left| l_a^{(T)}(\lambda) l_b^{(T)}(\lambda) \right|^{1/2} \right\} = \exp\left\{ -c_\alpha |r|^{\alpha} \gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) \right\}, \tag{15}$$

где

$$\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) = \left(\frac{Q(\lambda)}{2} \right)^{\alpha} \int_{R^n} \Big| \left(H_{ab}^{(T)}(\lambda-\mu, \lambda-\mu) \right)^2 + \left(H_{ab}^{(T)}(\lambda-\mu, \lambda+\mu) \right)^2 +$$
$$+ \left(H_{ab}^{(T)}(\lambda+\mu, \lambda-\mu) \right)^2 + \left(H_{ab}^{(T)}(\lambda+\mu, \lambda+\mu) \right)^2 \Big|^{\alpha/2} f_{ab}(\mu) d\mu, \tag{16}$$

а $\lambda \in R^n,\ r \in R,\ \alpha \in (0,2)$, а $c_\alpha,\ Q(\lambda),\ A_{ab}^{(T)},\ H_{ab}^{(T)}(x,y)$ заданы соотношениями (13), (8), (5) и (14) соответственно.

Теорема 1. Для математического ожидания и дисперсии взаимной модифицированной периодограммы $I_{ab}^{(T)}(\lambda),\ \lambda \in R^n$, определенной соотношением (9), имеют место следующие соотношения:

$$EI_{ab}^{(T)}(\lambda) = \left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{p/\alpha}, \qquad 0 < p < \alpha, \tag{17}$$

$$DI_{ab}^{(T)}(\lambda) = \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{2p/\alpha}, \qquad 0 < p < \alpha/2, \tag{18}$$

$\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) > 0,\ \alpha \in (0,2)$, а $H_{ab}^{(T)}(x,y),\ Q(\lambda),\ k(p,\alpha)$ заданы равенствами (14), (8), (10) соответственно.

Доказательство. Покажем справедливость соотношения (17). Воспользуемся равенством, приведенным в [3]:

$$|x|^p = D^{-1}(p)\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\exp\{iux\}}{|u|^{1+p}}du\right] = D^{-1}(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(xu)}{|u|^{1+p}}du, \tag{19}$$

где $D(p)$ определено соотношением (12).

Подставляя в (19) вместо x выражение $A_{ab}^{(T)}\left|l_a^{(T)}(\lambda)l_b^{(T)}(\lambda)\right|^{1/2}$, воспользовавшись свойствами математического ожидания и равенством (15), получим

$$EI_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\left\{\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-E\exp\left\{iuA_{ab}^{(T)}\left|l_a^{(T)}(\lambda)l_b^{(T)}(\lambda)\right|^{1/2}\right\}}{|u|^{1+p}}du\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du, \tag{20}$$

где $F(p,\alpha),\ c_\alpha,\ A_{ab}^{(T)},\ l_a^{(T)}(\lambda),\ \gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)$ заданы соотношениями (11), (13), (5), (7) и (16) соответственно. В интеграле правой части равенства (20), сделав замену переменной интегрирования $u = \dfrac{x}{\left(c_\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{1/\alpha}}$, а также учитывая равенство (11), имеем

$$EI_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha\dfrac{|x|^\alpha}{c_\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)}\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right\}}{\dfrac{|x|^{1+p}}{\left(c_\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{(1+p)/\alpha}}}\frac{1}{\left(c_\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{1/\alpha}}dx =$$

$$= \left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{p/\alpha}\frac{1}{F(p,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-|x|^\alpha\}}{|x|^{1+p}}dx = \left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{p/\alpha},$$

что и требовалось показать.

Докажем соотношение (18). Используя равенство (19), получим

$$\left(I_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^2 = k^2(p,\alpha)\left|A_{ab}^{(T)}\left|l_a^{(T)}(\lambda)l_b^{(T)}(\lambda)\right|^{1/2}\right|^{2p} = k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{iuA_{ab}^{(T)}\left|l_a^{(T)}(\lambda)l_b^{(T)}(\lambda)\right|^{1/2}\right\}}{|u|^{1+2p}}du.$$

Воспользовавшись свойствами математического ожидания, а также выражением (15), имеем

$$E\left(I_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^2 = k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right\}}{|u|^{1+2p}}du. \tag{21}$$

В интеграле правой части равенства (21), сделав замену переменной интегрирования $u = \dfrac{x}{\left(c_\alpha\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{1/\alpha}}$, получим

$$E\left(I_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^2 = \frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}\left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{\frac{2p}{\alpha}}.$$

Учитывая соотношение (17), имеем

$$DI_{ab}^{(T)}(\lambda) = E\left(I_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^2 - \left(EI_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^2 = \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left(\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda)\right)^{2p/\alpha}.$$

Теорема доказана.

1. Демеш Н.Н., Соболева Т.В., Труш Н.Н. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 2. С. 53.
2. Труш Н.Н., Соболева Т.В. // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их применения: Материалы междунар. науч. конф. Мн., 2005. С. 276.
3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980.
4. Masry E., Cambanis S. // Stochastic Processes and Their Applications. 1984. Vol. 18. № 18. P. 31.

Поступила в редакцию 15.04.08.

Татьяна Валентиновна Соболева – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационного и программно-математического обеспечения автоматизированных производств.