

УДК 517.953; 517.956.6

О.А. КОНОПЕЛЬКО

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

The existence and uniqueness of strong solution of boundary value problem for fourth-order equation of composite type are proved in this paper. The methods of energy inequalities and mollifiers with variable step are used.

В настоящее время разработана достаточно полная теория корректно поставленных задач для уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов. Между тем в приложениях появляются задачи для уравнений, не принадлежащих ни к одному из вышеперечисленных типов, например для уравнений составного типа.

Уравнением составного типа будем называть уравнение с оператором, характеристический многочлен которого имеет как действительные, так и комплекснозначные характеристики. Впервые урав-

нения такого типа $\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta u = 0$, где Δ – оператор Лапласа, были рассмотрены Ж. Адамаром [1, 2], а также в работах [3–10].

В данной статье методом энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом доказывается существование и единственность сильного решения одной граничной задачи для уравнения четвертого порядка с оператором составного типа.

Постановка задачи. Рассмотрим область $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n+1)$ -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ независимых переменных $(t, \mathbf{x})$, $t \in (0, T)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Для функции $u: (t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с оператором составного типа в главной части:

$$Lu \equiv L^{(0)}u + A^{(2)}u = f, \quad (1)$$

где $L^{(0)} = L^{(1)}L^{(2)}$, $L^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$, $L^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b^2 \Delta$, a и b – произвольные постоянные, удовлетворяющие неравенству $b^2 > a^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $A^{(2)}u = \sum_{|\alpha| \leq 2} a^{(\alpha)}(t, \mathbf{x}) \mathbf{D}^\alpha u$, $a^{(\alpha)} \in C(\bar{Q})$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$, α_i , $i = \overline{0, n}$, – целые неотрицательные числа, $\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}}$, $f: (t, \mathbf{x}) \rightarrow f(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ – произвольная квадратично суммируемая функция.

На границе ∂Q области Q заданы граничные условия вида

$$l_0 u \equiv u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=T} = u|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где $\varphi: \mathbf{x} \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ – произвольная функция из пространства $H^3(\Omega)$, $\Gamma = \{(t, \mathbf{x}) \in \partial Q | 0 < t < T\}$ – боковая поверхность области Q , $\mathbf{v} = (v_0(t, \mathbf{x}), v_1(t, \mathbf{x}), \dots, v_n(t, \mathbf{x}))$ – единичная внешняя относительно области Q нормаль в точке $(t, \mathbf{x}) \in \Gamma$.

Запишем задачу (1) – (3) в операторном виде

$$\mathbf{L}u = \mathbf{F}, \quad (4)$$

где оператор $\mathbf{L} = (L, l_0)$, правая часть $\mathbf{F} = (f, \varphi)$. В качестве области определения $D(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ возьмем множество непрерывно дифференцируемых в замыкании $\bar{Q}$ области Q до четвертого порядка включительно функций, которые удовлетворяют граничным условиям (3), т. е.

$$D(\mathbf{L}) = \left\{ u \in C^4(\bar{Q}) \mid \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=T} = u|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2} \right|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Обозначим через B банахово пространство, получаемое замыканием множества $D(\mathbf{L})$ по норме

$$\|u\|_B = \left\| \sqrt{T-t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\|_{L_2(Q)} + \sum_{\substack{2 \leq |\alpha| \leq 3 \\ \alpha_0 \neq 3}} \|\mathbf{D}^\alpha u\|_{L_2(Q)} + \sup_{0 < \tau < T} \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\mathbf{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}(\tau),$$

где $\|\cdot\|_{L_2(Q)}$ – норма пространства $L_2(Q)$ квадратично суммируемых функций, заданных в области Q .

Обозначим через H гильбертово пространство правых частей операторного уравнения (4), т. е. $H = L_2(Q) \times H^3(\Omega)$, $\|\mathbf{F}\|_H = \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{H^3(\Omega)} = \|f\|_{L_2(Q)} + \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\mathbf{D}^\alpha \varphi\|_{L_2(\Omega)}$, где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Далее уравнение (4) рассматриваем в пределах только что введенных пространств B и H , оператор $\mathbf{L}: u \rightarrow \mathbf{L}u \in H$.

Предположим, что оператор $\mathbf{L}$ допускает замыкание $\bar{\mathbf{L}}$. Область определения $D(\bar{\mathbf{L}})$ оператора $\bar{\mathbf{L}}$ состоит из элементов $u \in B$, для которых существуют такие последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ элементов $u_k \in D(\mathbf{L})$, что $u_k \rightarrow u$ в B и $\mathbf{L}u_k \rightarrow \mathbf{F}$ в H при $k \rightarrow \infty$. Соответствующие элементы $\mathbf{F} \in H$ относят к области значений $R(\bar{\mathbf{L}})$ оператора $\bar{\mathbf{L}}$ и полагают $\bar{\mathbf{L}}u = \mathbf{F}$.

Линейный оператор $L: B \rightarrow H$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда из условий $u_k \rightarrow 0$ в B ($u_k \in D(L)$) и $Lu_k \rightarrow F$ в H при $k \rightarrow \infty$ следует $F=0$ по норме пространства H .

Под сильным решением задачи (1) – (3) (операторного уравнения (4)) будем понимать решение задачи $\bar{L}u = F$, $u \in D(\bar{L})$.

Можно показать, что для доказательства корректности задачи (1) – (3) (операторного уравнения (4)), т. е. существования и единственности сильного решения и его непрерывной зависимости от данных, необходимо доказать энергетическое неравенство для оператора L , замыкаемость оператора L и плотность множества значений $R(L)$ в пространстве H .

Теорема 1. Для оператора L операторного уравнения (4) справедливо энергетическое неравенство, т. е.

$$\|u\|_B \leq c \|Lu\|_H, \quad (5)$$

$\forall u \in D(L)$, где c – некоторая положительная постоянная, не зависящая от u .

Доказательство. Рассмотрим выражение $2LuMu$, где $Mu = C_1(t-T)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + C_2(t-T)\frac{\partial u}{\partial t}$, C_1 – некоторая положительная постоянная, которая будет выбрана позже, C_2 – некоторая достаточно большая положительная постоянная, представим его в дивергентном виде и проинтегрируем по области Q :

$$\begin{aligned} 2 \int_Q LuMu d\mathbf{x} &= 2C_1 \int_Q (T-t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^2 dtd\mathbf{x} + \int_Q (2(b^2 - a^2)C_1(T-t) + 3) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right)^2 dtd\mathbf{x} + \\ &+ \int_Q (2a^2b^2C_1(t-T) + b^2 - a^2) \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right)^2 dtd\mathbf{x} + a^2b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 dtd\mathbf{x} + \\ &+ 3C_2 \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dtd\mathbf{x} + (b^2 - a^2)C_2 \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dtd\mathbf{x} + a^2b^2C_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dtd\mathbf{x} - \\ &- a^2b^2T \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 d\mathbf{x} - a^2b^2(C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\mathbf{x} + \\ &+ a^2b^2C_1 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \Big|_{t=T} d\mathbf{x} + 2 \int_Q A^{(2)}uMu dtd\mathbf{x} + I, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} I &= 2a^2b^2C_1 \int_Q (t-T) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right) dtd\mathbf{x} + 2(b^2 - a^2) \int_Q (T-t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_j^2} \right) dtd\mathbf{x} - \\ &- 2(b^2 - a^2) \int_Q (T-t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right) dtd\mathbf{x} - 2a^2b^2 \int_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_k^2} \right) dtd\mathbf{x} + \\ &+ 2a^2b^2 \int_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x_i \partial x_k^2} \right) dtd\mathbf{x} - 2a^2b^2 \int_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) dtd\mathbf{x} + \\ &+ 2a^2b^2C_2 \int_Q (t-T) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right) dtd\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Покажем, что $I=0$. Для этого преобразуем подынтегральные выражения путем введения в точке $(t, \mathbf{x}) \in \Gamma$ локальной прямоугольной декартовой системы координат $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\tau}^{(n)})$, где $\mathbf{v}$ – вектор единичной внешней относительно области Q нормали в точке $(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}^{(k)} = (\tau_1^{(k)}(t, \mathbf{x}), \dots, \tau_n^{(k)}(t, \mathbf{x}))$, $k = \overline{1, n}$, – единичные векторы, лежащие в касательной гиперплоскости к области Q в точке $(t, \mathbf{x})$, попарно ортогональные между собой и ортогональные вектору $\mathbf{v}$. По формуле для производной по направлению имеем

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v}_i \right|_{\Gamma} + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(k)}} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)} \right|_{\Gamma}, \\
\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \right|_{\Gamma} + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\tau}^{(k)}} (\mathbf{v}_i \boldsymbol{\tau}_j^{(k)} + \mathbf{v}_j \boldsymbol{\tau}_i^{(k)}) \right|_{\Gamma} + \sum_{k,l=1}^n \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(k)} \partial \boldsymbol{\tau}^{(l)}} \boldsymbol{\tau}_i^{(k)} \boldsymbol{\tau}_j^{(l)} \right|_{\Gamma}, \\
\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{v}^3} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \right|_{\Gamma} + \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{v}^2 \partial \boldsymbol{\tau}^{(l)}} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k \boldsymbol{\tau}_j^{(l)} + \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k \boldsymbol{\tau}_i^{(l)} + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \boldsymbol{\tau}_k^{(l)}) \right|_{\Gamma} + \\
&+ \sum_{l,m=1}^n \left. \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\tau}^{(l)} \partial \boldsymbol{\tau}^{(m)}} (\mathbf{v}_k \boldsymbol{\tau}_i^{(l)} \boldsymbol{\tau}_j^{(m)} + \mathbf{v}_i \boldsymbol{\tau}_k^{(l)} \boldsymbol{\tau}_j^{(m)} + \mathbf{v}_j \boldsymbol{\tau}_k^{(l)} \boldsymbol{\tau}_i^{(m)}) \right|_{\Gamma} + \sum_{l,m,p=1}^n \left. \frac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\tau}^{(l)} \partial \boldsymbol{\tau}^{(m)} \partial \boldsymbol{\tau}^{(p)}} \boldsymbol{\tau}_k^{(l)} \boldsymbol{\tau}_i^{(m)} \boldsymbol{\tau}_j^{(p)} \right|_{\Gamma}, i = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Используя формулу Остроградского и формулы (7), а также попарную ортогональность векторов $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\tau}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, после несложных преобразований получим требуемое.

Используя неравенство

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{8}$$

оценим интеграл $2 \int_Q Lu Mudt d\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
2 \int_Q Lu Mudt d\mathbf{x} &\leq \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \int_Q (Lu)^2 dt d\mathbf{x} + \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
&+ \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \frac{C_2 T^2 \varepsilon_3}{2} \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

С учетом этой оценки из (6) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&2C_1 \int_Q (T-t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \int_Q (2(b^2 - a^2)C_1(T-t) + 3) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
&+ \int_Q (2a^2 b^2 C_1(t-T) + b^2 - a^2) \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right)^2 dt d\mathbf{x} + a^2 b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
&+ 3C_2 \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + (b^2 - a^2)C_2 \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dt d\mathbf{x} + a^2 b^2 C_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dt d\mathbf{x} - \\
&- a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 d\mathbf{x} - a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\mathbf{x} + \\
&+ a^2 b^2 C_1 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\mathbf{x} + 2 \int_Q A^{(2)} u Mudt d\mathbf{x} \leq \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \int_Q (Lu)^2 dt d\mathbf{x} + \\
&+ \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \frac{C_2 T^2 \varepsilon_3}{2} \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уменьшим левую часть неравенства (9) на неотрицательную величину $a^2 b^2 C_1 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\mathbf{x}$

и перенесем слагаемые $\frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x}$, $\frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i^2} \right)^2 dt d\mathbf{x}$ в левую часть, а слагаемые с ϕ – в правую. Оценим снизу некоторые слагаемые в левой части. Получим

$$\begin{aligned}
 & 2C_1 \int_Q (T-t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \left(b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T - \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \delta_{ij} \right) \sum_{i,j=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
 & + 3 \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right)^2 dt d\mathbf{x} + a^2 b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \left(3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} \right) \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
 & + (b^2 - a^2) C_2 \sum_{i=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right)^2 dt d\mathbf{x} + a^2 b^2 C_2 \sum_{i,j=1}^n \int_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dt d\mathbf{x} + 2 \int_Q A^{(2)} u M u dt d\mathbf{x} \leq \\
 & \leq \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \int_Q (Lu)^2 dt d\mathbf{x} + a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right)^2 d\mathbf{x} + \\
 & + a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\mathbf{x} + \frac{C_2 T^2 \varepsilon_3}{2} \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

Постоянные C_1 , ε_1 и ε_2 выберем таким образом, чтобы выполнялись неравенства $b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T > 0$, $3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} > 0$ и $b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T - \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} > 0$ соответственно.

Переходя в неравенстве (10) к норме пространства $L_2(Q)$, получим

$$\begin{aligned}
 & 2C_1 \left\| \sqrt{T-t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T - \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \delta_{ij} \right) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
 & + a^2 b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} \right) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 + (b^2 - a^2) C_2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
 & + a^2 b^2 C_2 \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 2 \int_Q A^{(2)} u M u dt d\mathbf{x} \leq \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + \\
 & + a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{C_2 T^2 \varepsilon_3}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Далее в левую часть неравенства (11) добавим недостающие слагаемые $\sup_{0 < \tau < T} \|\mathbf{D}^a u\|_{L_2(\Omega)}^2(\tau)$, $|\alpha| \leq 1$.

Для этого проинтегрируем по области $Q^{(\tau)} = (0, \tau) \times \Omega$, $\tau \in (0, T)$, соотношение $C_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = 2C_3 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где C_3 – некоторая достаточно большая положительная постоянная:

$$\begin{aligned}
 C_3 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 2C_3 \int_{Q^{(\tau)}} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt d\mathbf{x} \leq \frac{C_3}{\varepsilon_4} \int_{Q^{(\tau)}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \\
 &+ \varepsilon_4 C_3 \int_{Q^{(\tau)}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^2 dt d\mathbf{x} \leq \frac{C_3}{\varepsilon_4} \int_{Q^{(\tau)}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x} + \varepsilon_4 C_3 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(Q)}^2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим $v(\tau) = C_3 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Тогда $C_3 \int_{Q^{(\tau)}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt d\mathbf{x} = \int_0^\tau v(t) dt$ и неравенство (12) примет вид

$$v(\tau) \leq \frac{1}{\varepsilon_4} \int_0^\tau v(t) dt + \varepsilon_4 C_3 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(Q)}^2.$$

Сложим его с неравенством (11) и применим неравенство Гронуолла:

$$\begin{aligned}
& 2C_1 \left\| \sqrt{T-t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T - \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \delta_{ij} \right) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
& + a^2 b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} - \varepsilon_4 C_3 \right) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 + (b^2 - a^2) C_2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
& + a^2 b^2 C_2 \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 2 \int_Q A^{(2)} u M u d\mathbf{x} + v(\tau) \leq e^{\frac{\tau}{\varepsilon_4}} \left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + \\
& + e^{\frac{\tau}{\varepsilon_4}} \left(a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_2 T^2 \varepsilon_3 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2 \right) \leq \\
& \leq e^{\frac{T}{\varepsilon_4}} \left(\left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \\
& + e^{\frac{T}{\varepsilon_4}} \frac{C_2 T^2 \varepsilon_3}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)}^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

ε_4 выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство $3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} - \varepsilon_4 C_3 > 0$. Правая часть (13)

не зависит от τ , поэтому в левой части можно перейти к точной верхней грани по τ . Получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
& 2C_1 \left\| \sqrt{T-t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(b^2 - a^2 - 2a^2 b^2 C_1 T - \frac{T^2 \varepsilon_2}{2} \delta_{ij} \right) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
& + a^2 b^2 \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \left(3C_2 - \frac{C_1 T^2 \varepsilon_1}{2} - \varepsilon_4 C_3 \right) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 + (b^2 - a^2) C_2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\
& + a^2 b^2 C_2 \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + C_4 \sup_{0 < \tau < T} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 (\tau) + 2 \int_Q A^{(2)} u M u d\mathbf{x} \leq \\
& \leq e^{\frac{T}{\varepsilon_4}} \left(\left(\frac{C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{C_2}{\varepsilon_3} \right) \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + a^2 b^2 T \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^2 b^2 (C_1 + TC_2) \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом добавим слагаемые $C_5 \sup_{0 < \tau < T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 (\tau)$, $i = \overline{1, n}$, и $C_5 \sup_{0 < \tau < T} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 (\tau)$. В ре-

зультате получим неравенство

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{T-t} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{\substack{|\mathbf{a}|=3 \\ \alpha_0 \neq 3}} \|\mathbf{D}^{\mathbf{a}} u\|_{L_2(Q)}^2 + C_6 \left(\sum_{|\mathbf{a}|=2} \|\mathbf{D}^{\mathbf{a}} u\|_{L_2(Q)}^2 + \sup_{0 < \tau < T} \sum_{|\mathbf{a}| \leq 1} \|\mathbf{D}^{\mathbf{a}} u\|_{L_2(\Omega)}^2 (\tau) \right) + \\
& + 2 \int_Q A^{(2)} u M u d\mathbf{x} \leq c \left(\|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

в котором постоянная C_6 достаточно велика.

Оценив $\int_Q A^{(2)} u M u d\mathbf{x}$ снизу с использованием неравенства (8), получим доказываемое энергетическое неравенство для оператора $\mathbf{L}$.

Лемма 1. Оператор L операторного уравнения (4) как оператор из B в H допускает замыкание.

Лемма 2. Множество значений $R(L)$ оператора L операторного уравнения (4) плотно в $L_2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $L^{(0)}$ как композицию операторов $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$. Множество значений $R(L^{(1)})$ оператора $L^{(1)}$ с областью определения $D(L^{(1)}) = D^{(0)}(L)$, где $D^{(0)}(L) = \{u \in D(L) \mid l_0 u = 0\}$, плотно в $L_2(Q)$ (доказательство повторяет доказательство теоремы 4 [11]). Множество значений $R(L^{(2)} - k)$ оператора $L^{(2)} - k$, где k – некоторое достаточно большое число, с областью определения $D(L^{(2)} - k) = R(L^{(1)})$ плотно в $L_2(Q)$ (см. доказательство леммы 2 [12]). Отсюда и так как $R(L^{(0)} - kL^{(1)}) = R(L^{(2)} - k)$ следует, что множество значений оператора $L^{(0)} - kL^{(1)}$ с областью определения $D(L^{(0)} - kL^{(1)}) = D^{(0)}(L)$ плотно в $L_2(Q)$, т. е. если для некоторого элемента $v \in L_2(Q)$ выполняется равенство $(L^{(0)}u - kL^{(1)}u, v)_{L_2(Q)} = 0$, $\forall u \in D^{(0)}(L)$, то $v=0$ по норме пространства $L_2(Q)$.

Рассмотрим оператор $L^{(0)} = (L^{(0)} - kL^{(1)}, l_0)$ с областью определения $D(L^{(0)}) = D(L)$. Пусть элемент $v = (v, v_0) \in H$ ортогонален множеству $R(L^{(0)})$. Это означает, что выполнено равенство

$$(L^{(0)}u - kL^{(1)}u, v)_{L_2(Q)} + (l_0 u, v_0)_{H^3(\Omega)} = 0, \quad (14)$$

$\forall u \in D(L)$. Полагая в (14), в частности, что u равно любому элементу из $D^{(0)}(L)$, из (14) получим равенство $(L^{(0)}u - kL^{(1)}u, v)_{L_2(Q)} = 0$, $\forall u \in D^{(0)}(L)$. Из этого равенства в соответствии с доказанным ранее следует, что $v=0$ по норме пространства $L_2(Q)$. Теперь (14) принимает вид $(l_0 u, v_0)_{H^3(\Omega)} = 0$,

$\forall u \in D(L)$. Если функция $u \in D(L) = \left\{ u \in C^4(\overline{Q}) \mid \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=T} = u \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$,

то $l_0 u = u|_{t=0} \in C^4(\overline{\Omega^{(0)}})$, где $\Omega^{(0)} = \{(t, x) \mid t=0, x \in \Omega\}$. Так как множество $C^4(\overline{\Omega^{(0)}})$ плотно в $H^3(\Omega)$, то $v_0=0$ в $H^3(\Omega)$. Таким образом, доказана плотность множества значений оператора $L^{(0)} = (L^{(0)} - kL^{(1)}, l_0)$

в пространстве H . Для завершения доказательства леммы плотность множества значений оператора L операторного уравнения (4) доказывается методом продолжения по параметру [13].

Теорема 2. Для любых функций $f \in L_2(Q)$, $\phi \in H^3(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u \in B$ граничной задачи (1) – (3) и справедлива оценка

$$\|u\|_B \leq c \left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\phi\|_{H^3(\Omega)} \right),$$

где постоянная c та же, что и в неравенстве (5).

Теорема 2 следует из теоремы 1 и лемм 1 и 2.

1. Hadamard J. // The Tohoku Mathematical Journal. 1933. Vol. 37. P. 133.
2. Hadamard J. // L'enseignement mathématique. 1936. Vol. 35. P. 5.
3. Sjöstrand O. // Arkiv f. M. A. O. F. Bd. 25A. 1936. № 21. P. 1.
4. Ibid. 1937. № 1. P. 1.
5. Cattabriga L. // Rendiconti Sem. Mat. Università Padova. 1957. Vol. 27.
6. Davis R.B. // Proceeding Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 751.
7. Ibid. 1954. Vol. 5. P. 720.
8. Дайняк В.В., Корзюк В.И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 867.
9. Корзюк В.И., Дайняк В.В. // Там же. 1992. Т. 28. № 6. С. 1056.
10. Корзюк В.И., Дайняк В.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 54.
11. Корзюк В.И. // Там же. 1996. № 2. С. 55.
12. Корзюк В.И. // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 6. С. 25.
13. Корзюк В.И. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 343.

Поступила в редакцию 21.11.07.

Ольга Анатольевна Конопелько – аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики В.И. Корзюк.