

ИНТЕГРАЛЫ И ПОСЛЕДНИЕ МНОЖИТЕЛИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

The spectral method of building of the autonomous first integrals and last multipliers for special case of systems of exact differentials is elaborated.

Рассмотрим автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dz = A(z) dt, \quad (1)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_m)$ – точки пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно ($m < n$), $dz = \text{colon}(dz_1, \dots, dz_n)$, $dt = \text{colon}(dt_1, \dots, dt_m)$, элементы $(n \times m)$ -матрицы $A(z) = \|A_{ij}(z)\|$ ($i = \overline{1, n}$ – номер строки, $j = \overline{1, m}$ – номер столбца) есть функции $A_{ip} : z \rightarrow a_{pi}(z)$, $A_{iq} : z \rightarrow a_{qi}(z) - z_i a_{q, n+1}(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{s+1, m}$, $i = \overline{1, n}$, $0 \leq s \leq m$, где линейные функции $a_{j\tau} : z \rightarrow \sum_{\xi=1}^n a_{j\tau\xi} z_\xi + a_{j\tau, n+1}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $\tau = \overline{1, n}$ при $j = \overline{1, s}$, $\tau = \overline{1, n+1}$ при $j = \overline{s+1, m}$, с такими комплексными коэффициентами, что $\sum_{i=1}^n |a_{q, n+1, i}| \neq 0$, $q = \overline{s+1, m}$.

Дифференциальную систему (1) будем рассматривать при условии перестановочности матриц ее коэффициентов:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j, \zeta = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где квадратные матрицы $A_j = \|a_{j\tau\delta}\|$, $j = \overline{1, m}$, $\delta = \overline{1, n+1}$ – номер строки, $\tau = \overline{1, n+1}$ – номер столбца, причем $a_{p, n+1, \delta} = 0$, $p = \overline{1, s}$, $\delta = \overline{1, n+1}$. Непосредственными вычислениями устанавливаем, что при выполнении равенств (2) имеет место система коммутаторных тождеств $[\mathfrak{I}_j(z), \mathfrak{I}_\zeta(z)] = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $j, \zeta = \overline{1, m}$, где индуцированные системой (1) линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{I}_p(z) = \sum_{i=1}^n a_{pi}(z) \partial_{z_i}$, $\mathfrak{I}_q(z) = \sum_{i=1}^n (a_{qi}(z) - z_i a_{q, n+1}(z)) \partial_{z_i}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $p = \overline{1, s}$, $q = \overline{s+1, m}$. Эти коммутаторные тождества выражают полную разрешимость [1, с. 24; 2, с. 19–20, 25] дифференциальной системы (1).

Операторы $\mathfrak{I}_p$, $p = \overline{1, s}$, индуцируют линейную дифференциальную систему [2, с. 239–272; 3–5], а операторы $\mathfrak{I}_q$, $q = \overline{s+1, m}$, – дифференциальную систему Якоби [2, с. 273–311; 6–8]. Таким образом, система (1) является линейной дифференциальной системой, возмущенной операторами $\mathfrak{I}_q$, $q = \overline{s+1, m}$, с нелинейными координатными функциями.

В настоящей статье дано решение задачи о построении автономных первых интегралов и последних множителей системы (1) при (2) по ее линейным неоднородным частным интегралам с учетом их кратностей.

Впервые подход построения общего интеграла по известным частным интегралам для дифференциальных уравнений был сформулирован Г. Дарбу [9]. В [10] его идеи изложены и применены для нахождения первых интегралов обыкновенной дифференциальной системы Якоби – Фурье. В [2, с. 185–186, 203–212; 11–14] задача Дарбу распространена и на построение последних множителей. С целью решения этой задачи разработан метод частных интегралов для обыкновенных [11] и многомерных [2, с. 161–238; 12–14] полиномиальных дифференциальных систем. При этом введено понятие условного частного интеграла, определены понятия кратности (первоначально веса) частного интеграла и интегральных точек полиномиальных дифференциальных систем [2, с. 161–238; 11–14]. Это позволило уменьшить количество частных интегралов, достаточных для построения первого интеграла или последнего множителя. Другие результаты по данному направлению теории дифференциальных уравнений можно найти в [2].

На основании метода частных интегралов разработаны спектральные методы построения базисов первых интегралов линейных обыкновенных [3] и многомерных [2, с. 239–272; 4; 5; 15] дифференциальных систем. В предложенных методах задача поиска линейных частных интегралов линейных систем сведена к алгебраической задаче нахождения собственных векторов матриц коэффициентов этих систем. Подобный подход к поиску частных интегралов дифференциальных систем был распространен и на нелинейные системы Дарбу и Якоби, для которых разработаны методы построения интегрального базиса с точностью до последнего множителя [16] и базисных первых интегралов [2, с. 273–311; 6–8] соответственно.

Для решения поставленной для системы (1) при (2) задачи получен спектральный метод, основанный на методе частных интегралов автономных полиномиальных дифференциальных систем [2, с. 187–226; 12–14].

Лемма 1. *Линейная функция $w: z \rightarrow vZ \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$, $Z = (z_1, \dots, z_n, 1)$, является полиномиальным частным интегралом системы (1) при (2), если и только если v – общий собственный вектор перестановочных матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1 из [2, с. 240–241, 274–275; 4; 7] устанавливаем, что функция w будет полиномиальным частным интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда вектор v является нетривиальным решением линейной однородной системы $(A_j - \lambda^j E)v^T = 0$, $j = \overline{1, m}$, где $\lambda^j \in \mathbb{C}$, E – единичная матрица, T – знак транспонирования. Таким образом, с учетом связей между собственными векторами перестановочных матриц [17, с. 191–194] лемма доказана.

В случае простых элементарных делителей матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, автономные первые интегралы или последние множители системы (1) при (2) строятся на основании следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть v_k , $k = \overline{1, M}$, – общие линейно независимые собственные векторы матриц A_j , соответствующие собственным числам λ_k^j , $j = \overline{1, m}$. Тогда при $M = m + 1$ функция*

$$W: z \rightarrow \prod_{k=1}^M (v_k Z)^{h_k} \quad \forall z \in D, \quad D \subset \mathbb{C}^n, \quad Z = (z_1, \dots, z_n, 1), \quad (3)$$

будет автономным первым интегралом системы (1), если числа h_k , $k = \overline{1, M}$, являются нетривиальным решением линейной однородной системы

$$\sum_{k=1}^M h_k = 0, \quad \sum_{k=1}^M \lambda_k^j h_k = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

а если числа h_k , $k = \overline{1, M}$, являются нетривиальным решением линейной неоднородной системы $\sum_{k=1}^M h_k = -n - 1$, $\sum_{k=1}^M \lambda_k^j h_k = -\sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau\tau}$, $j = \overline{1, m}$, то функция (3) будет автономным последним множителем системы (1).

Метод доказательства аналогичен доказательству теоремы 1 из [2, с. 241–242, 276–277; 4; 7]. При этом учитываем, что расходимости ($p = \overline{1, s}$, $q = \overline{s + 1, m}$)

$$\operatorname{div} \mathfrak{I}_p(z) = \sum_{\tau=1}^{n+1} a_{p\tau\tau}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{I}_q(z) = -(n+1) a_{q, n+1}(z) + \sum_{\tau=1}^{n+1} a_{q\tau\tau} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \quad (5)$$

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 при $M = m + 2$. Тогда функция (3) при (4) будет автономным первым интегралом системы (1).*

Например, для вполне разрешимой на $\mathbb{C}^n$ системы

$$\begin{aligned} dz_1 &= 2iz_1 dt_1 + (z_1 - z_1 a(z)) dt_2, \\ dz_2 &= (-4iz_1 + 2iz_3 + 4i) dt_1 + ((-3+i)z_1 + iz_3 - iz_4 + 2i - z_2 a(z)) dt_2, \end{aligned}$$

$$dz_3 = (-iz_1 + 2iz_3 + iz_4 + 4i) dt_1 + (-3z_1 - 2z_2 + (2+i)z_3 - 2z_4 + 2i - z_3 a(z)) dt_2,$$

$$dz_4 = (iz_1 + iz_4) dt_1 + ((1-i)z_1 + iz_4 - z_4 a(z)) dt_2,$$

где $a(z) \equiv z_1 + z_2 - z_3 + z_4$, по общим собственным векторам $v_1 = (1, 1, -1, 1, -2)$, $v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, -1, 1, 0)$, $v_4 = (-1, 0, 0, 1, 0)$, $v_5 = (-1+i, 0, 2, 2, 4)$, соответствующим собственным числам $\lambda_1^1 = 0$, $\lambda_2^1 = 2i$, $\lambda_3^1 = 0$, $\lambda_4^1 = i$, $\lambda_5^1 = 2i$ и $\lambda_1^2 = 0$, $\lambda_2^2 = 1$, $\lambda_3^2 = 2$, $\lambda_4^2 = i$, $\lambda_5^2 = i$, строим (следствие 1) автономный интегральный базис

$$W_1 : z \rightarrow \frac{(v_1 Z)^{1.5-i} v_2 Z}{(v_3 Z)^{0.5-i} (v_4 Z)^2} \quad \text{и} \quad W_2 : z \rightarrow \frac{(v_2 Z)^{1-i} (v_4 Z)^4}{(v_1 Z)^2 (v_5 Z)^{3-i}}$$

на любой области из множества $\{z : v_1 Z v_2 Z v_3 Z v_4 Z v_5 Z \neq 0\}$, $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, 1)$.

Если хотя бы одна из матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, имеет кратные элементарные делители, то из системы (1) произвольным образом выделим обыкновенную дифференциальную систему

$$dz_i = A_{i\zeta}(z) dt_\zeta, \quad i = \overline{1, n}, \quad \zeta \in \{1, \dots, m\}, \quad (1. \zeta)$$

со свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пусть λ_i^ζ – собственное число матрицы A_ζ , которому соответствует элементарный делитель кратности k и собственный вектор v_{0l} . Вектор v_{kl} , являющийся решением системы уравнений $(A_\zeta - \lambda_i^\zeta E) (v_{kl})^T = k (v_{k-1,l})^T$, $k = \overline{1, k-1}$, назовем k -м присоединенным вектором [2, с. 252, 288; 4; 7] матрицы A_ζ , соответствующим собственному числу λ_i^ζ .

Аналогично доказательству теоремы 4 из [2, с. 252–256, 289–292; 4] с учетом системы тождеств (5) доказываем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть: 1) v_{0l} и $v_{\theta l}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, – линейно независимые общие собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединенные векторы матрицы A_ζ , соответствующие собственным числам λ_l^ζ , $l = \overline{1, r}$, с элементарными делителями кратностей s_l , $\sum_{l=1}^r s_l \geq M$; 2) дифференциальная система (1. ζ) не имеет первых интегралов $W_{\theta l}^j : z \rightarrow \Im_j V_{\theta l}(z) \quad \forall z \in D, D \subset \mathbb{C}^n, j = \overline{1, m}, j \neq \zeta$, где функции $V_{\theta l} : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, такие, что

$$v_{\theta l} Z = \sum_{u=1}^{\theta} \binom{\theta-1}{u-1} V_{ul}(z) v_{\theta-u,l} Z \quad \forall z \in D. \quad (6)$$

Тогда при $M = m + 1$ функция

$$W : z \rightarrow \prod_{\xi=1}^k (v_{0\xi} Z)^{h_{0\xi}} \exp \sum_{u=1}^{\varepsilon_\xi} h_{u\xi} V_{u\xi}(z) \quad \forall z \in D, \quad (7)$$

где $Z = (z_1, \dots, z_n, 1)$, $\sum_{\xi=1}^k (\varepsilon_\xi + 1) = M$, $\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k}$, $k \leq r$, будет автономным первым интегралом системы (1) при (2), если числа $h_{u\xi}$, $u = \overline{0, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, есть нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^k h_{0\xi} = 0, \quad \sum_{\xi=1}^k \left(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{u=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{u\xi}^j h_{u\xi} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

а если числа $h_{u\xi}$, $u = \overline{0, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, есть нетривиальное решение линейной неоднородной системы

$$\sum_{\xi=1}^k h_{0\xi} = -n-1, \quad \sum_{\xi=1}^k \left(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{u=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{u\xi}^j h_{u\xi} \right) = - \sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \text{то функция (7) будет автономным по-}$$

следним множителем системы (1) при (2). При этом функции-решения $V_{u\xi}$ системы (6) такие, что

$\Im_j V_{u\xi}(z) \equiv \mu_{u\xi}^j$, $\mu_{u\xi}^j = \text{const}$, $u = \overline{1, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, а λ_ξ^j , $\xi = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, – собственные числа матриц A_j , соответствующие собственным векторам $v_{0\xi}$.

Из теоремы 2 получаем

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 2 при $M = m + 2$. Тогда функция (7) при (8) будет первым интегралом системы (1) при (2).

Например, для вполне разрешимой на $\mathbb{C}^n$ системы

$$\begin{aligned} dz_1 &= (z_1 + z_2 - z_3 - 1) dt_1 + (i z_1 + i - z_1 a(z)) dt_2, \\ dz_2 &= (-z_2 + z_3) dt_1 + ((1+i)z_2 - z_3 - i - z_2 a(z)) dt_2, \\ dz_3 &= (z_1 - 1) dt_1 + (-z_1 + i z_3 + 1 - i - z_3 a(z)) dt_2, \end{aligned}$$

где $a(z) \equiv z_1 + z_2 - z_3 - 1 + 2i$, по общим линейно независимым собственным векторам $v_{01} = (1, 1, -1, -1)$, $v_{04} = (1, 1, -1, -1+i)$, соответствующим собственным числам $\lambda_3^1 = \lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 0$, $\lambda_4^1 = 0$ и $\lambda_3^2 = \lambda_2^2 = \lambda_1^2 = i$, $\lambda_4^2 = 2i$, и присоединенным векторам $v_{11} = (-1, 0, 0, 1)$, $v_{21} = (2, 0, 2, 0)$, соответствующим собственному числу λ_1^2 , строим (следствие 2) автономный интегральный базис

$$W: z \rightarrow (v_{01}Z)^{-2} (v_{04}Z)^2 \exp(-2i V_{11}(z) - i V_{21}(z)) \quad \forall z \in D, \quad D \subset \mathbb{C}^3,$$

где функции $V_{11}: z \rightarrow v_{11}Z (v_{01}Z)^{-1}$, $V_{21}: z \rightarrow (v_{01}Z \ v_{21}Z - (v_{11}Z)^2)(v_{01}Z)^{-2} \quad \forall z \in D$, D – любая область из множества $\{z: v_{01}Z \neq 0\}$, $Z = (z_1, z_2, z_3, 1)$.

* * *

Итак, для автономной системы уравнений в полных дифференциалах (1) при (2) разработан спектральный метод построения автономных первых интегралов и последних множителей. Их нахождение осуществляется по линейным неоднородным частным интегралам (с учетом кратностей), которые строятся на основании общих собственных векторов матриц коэффициентов A_j , $j = \overline{1, m}$. Предложенный метод является регулярным, а первые интегралы и последние множители строятся на его основании в явном виде.

1. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004.
2. Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно, 2006.
3. Буслюк Д. В., Проневич А. Ф. // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2007. № 2 (52). С. 29.
4. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru>). 2001. № 3. С. 17.
5. Проневич А. Ф. Автономные интегралы линейных систем в полных дифференциалах. Мн., 2002. Деп. в ВИНТИ 02.10.02, № 1667-B2002.
6. Горбузов В. Н., Даранчук С. Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 70.
7. Горбузов В. Н., Даранчук С. Н. // Изв. Рос. гос. пед. ун-та. Естеств. и точ. науки. 2005. № 5. С. 65.
8. Горбузов В. Н., Даранчук С. Н. // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2007. № 3 (57). С. 63.
9. Darboux M. G. // Bull. des sci. 1878. Vol. 2. P. 60.
10. Лагутинский М. Частные алгебраические интегралы. Харьков, 1908.
11. Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 3. С. 76.
12. Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1819.
13. Горбузов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 562.
14. Горбузов В. Н. // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru>). 2000. № 2. С. 1.
15. Горбузов В. Н., Проневич А. Ф. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 49.
16. Горбузов В. Н., Павлючик П. Б. // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru/journal>). 2002. № 2. С. 26.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.

Поступила в редакцию 04.03.08.

Виктор Николаевич Горбузов – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы.

Сергей Николаевич Даранчук – аспирант кафедры математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы. Научный руководитель – В. Н. Горбузов.