УДК 532.516

В.П. САВЧУК, О.Н. ВЯРЬВИЛЬСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗМЫВА ДНА В ЗАМКНУТОМ КАНАЛЕ

The approximate solution for the problem of a wash-away fine-disperse fraction is presented, the fraction being deposited on the bottom of a closed horizontal canal filled in with a viscous incompressible fluid. The motion is created by a pump with a given volume rate of flow, which is placed in a cross-section of the canal. The form of a free liquid surface and of the bottom, as well as the time of a deposited fraction wash – away are to be defined.

The solution for the problem is based on the Stok's approximate equations and expressed in series. A simple formula is obtained for the wash-away time of a deposited layer with a given thickness, it being obtained under some physically substantiated hypothesis about the behavior of medium characteristics.

Рассматривается ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости в открытом замкнутом горизонтальном канале, которое может быть вызвано помещенным в некоторое сечение канала насосом с заданным расходом $Q,$ использование которого создает резкий перепад уровня жидкости, что приводит к ее движению по всему каналу под действием силы тяжести. Если геометрические параметры канала неизменны и расход Q постоянен, то через короткий промежуток времени движение жидкости установится и перестанет зависеть от начальных условий.

Однако для приложений более важным является случай, когда дно канала образовано осажденной фракцией, плотность которой близка к плотности жидкости. В этом случае при движении жидкости частицы осажденной фракции переходят во взвешенное состояние и увлекаются течением, в результате чего форма дна постепенно меняется. Таким образом, течение полученной среды со взвешенными частицами будет зависеть от времени в силу граничных условий на изменяющемся дне, т. е. станет квазистационарным. При такой постановке задачи определению подлежат форма свободной поверхности жидкости, форма дна и время размыва слоя осажденной фракции заданной толщины.

Сформулированная проблема последовательно решалась авторами в статьях [1] – [3]. В настоящей работе приводится другой приближенный способ решения этой задачи.

Предположим, что кривизна оси канала мала, приближенно будем считать канал плоским и прямолинейным с длиной l. Введем систему координат xOy (ось y вертикальна) и рассмотрим сначала стационарную задачу нахождения движения жидкости и ее свободной поверхности $y = h + \varphi(x)$, зная форму дна $y = H + \psi(x)$ и расход жидкости Q. Здесь $(h - H)l$ – объем жидкости в канале, $\left|\frac{\psi(x)}{h-H}\right|$ – мало и $\int_0^l \psi(x)dx = 0.$

Скорость жидкости (u, v), давление p и функция $\varphi(x)$ могут быть найдены из уравнений [4]

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$y = h + \varphi: \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ u\varphi' - v = 0, \ p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$y = H + \psi: \ u = v = 0. \qquad (2)$$

Уравнения (1) взяты в приближении Стокса, в граничных условиях (2) учтена малость функции φ при малом расходе Q. Штрихом обозначается производная функции по ее аргументу.

Учитывая, что все характеристики течения, кроме давления p, должны совпадать при $x = 0$ и $x = l$, представим искомые функции в виде

$$p = \rho g(h + \varphi - y) + P(x, y), \quad \varphi = C\left(x - \frac{l}{2}\right) + \Phi(x),$$

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{1k}(y)\sin a_k x + u_{2k}(y)\cos a_k x\right),$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(v_{1k}(y)\sin a_k x + v_{2k}(y)\cos a_k x\right),$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_{1k}(y)\sin a_k x + p_{2k}(y)\cos a_k x\right), \qquad (3)$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{1k}\sin a_k x + \varphi_{2k}\cos a_k x\right) + 2C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin a_k x}{a_k},$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_{1k}\sin a_k x + \psi_{2k}\cos a_k x\right), \quad a_k = \frac{2k\pi}{l},$$

C – неизвестная постоянная.

Линеаризованные граничные условия (2) запишутся так:

$$y = h: \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ \ u_0\varphi' - v = 0, \ \ P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$y = H: \ u + \frac{\partial u_0}{\partial y}\psi = 0, \ \ v = 0. \qquad (4)$$

После подстановки разложений (3) в уравнения (1) и условия (4) получим последовательность граничных задач для искомых функций.

При $k = 0$ имеем

$$u'' = \frac{Cg}{\nu}, \quad y = h: u_0{}' = 0; \quad y = H: \ u_0 = 0.$$

Отсюда находим

$$u_0(y) = \frac{Cg}{2\nu}(y^2 - 2hy - H^2 + 2hH).$$

Постоянная C выражается через расход Q: $C = -\dfrac{3\nu Q}{g(h-H)^3}$.

При любом $k \neq 0$ получается следующая задача:

$$0 = ga_k\varphi_{2k} + \frac{a_k}{\rho}p_{2k} + \nu(u''_{1k} - a_k^2 u_{1k}),$$

$$0 = -ga_k\varphi_{1k} - 2Cg - \frac{a_k}{\rho}p_{1k} + \nu(u''_{2k} - a_k^2 u_{2k}), \qquad (5)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}p'_{ik} + \nu(v''_{ik} - a_k^2 v_{ik}), \ \ i = 1, 2,$$

$$-a_k u_{2k} + v'_{1k} = 0, \quad a_k u_{1k} + v'_{2k} = 0;$$

$$y = h: \quad \frac{v''_{2k}}{a_k} - b_1\varphi_{1k} + a_k v_{2k} = 0, \quad \frac{v''_{1k}}{a_k} + b_1\varphi_{2k} + a_k v_{1k} = 0,$$

$$a_k b_2\varphi_{2k} + v_{1k} = 0, \quad -a_k b_2\varphi_{1k} + v_{2k} = 0,$$

$$\frac{\mu}{a_k^2}v'''_{1k} - 3\mu v'_{1k} - \rho g\varphi_{1k} - \frac{2C\rho g}{a_k} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\mu}{a_k^2}v'''_{2k} - 3\mu v'_{2k} - \rho g\varphi_{2k} = 0;$$

$$y = H: u_{ik} + b_3\psi_{ik} = 0, \quad v_{ik} = 0, \ i = 1, 2. \qquad (7)$$

Здесь

$$b_1 = u''_0(h) = -\frac{3Q}{(h-H)^3}, \quad b_2 = u_0(h) = \frac{3Q}{2(h-H)},$$

$$b_3 = u'_0(h) = \frac{3Q}{(h-H)^2}.$$

Система (5) сводится к уравнению

$$v''''_{ik} - 2a_k^2 v''_{ik} + a_k^4 v_{ik} = 0, \quad i = 1, 2,$$

решение которого имеет вид

$$v_{ik} = (C_{i1} + C_{i2}(y-H))\operatorname{sh}a_k(y-H) + (C_{i3} + C_{i4}(y-H))\operatorname{ch}a_k(y-H).$$

Из десяти условий (6), (7) находим восемь констант C_{ij} $(i = 1,2; \ j = \overline{1,4})$ и величины $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ как функции величин ψ_{1k}, ψ_{2k}, что и завершает решение стационарной задачи.

Пусть теперь дно канала размывается и его форма зависит от времени: $y = H(t) + \psi(x,t)$, $H(0) = 0$, $\psi(x,0) = 0$. Чтобы не выйти за рамки модели вязкой несжимаемой жидкости, необходимо предположить, что:

1) в результате размыва дна частицы осажденной фазы переходят в жидкость, увеличивая ее плотность ρ и вязкость μ;

2) изменение величин ρ и μ пропорционально массе перешедших в жидкость частиц фазы и происходит одновременно во всех точках потока;

3) общий объем жидкости и осажденной фазы в канале не изменяется в процессе размыва.

Предположим также, что скорость размыва дна пропорциональна касательному напряжению в жидкости на его поверхности, т. е.

$$\frac{d}{dt}(H+\psi) = -\chi\mu\left.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{y=H+\psi}, \tag{8}$$

где χ – коэффициент, характеризующий скорость перемещения границы раздела жидкости и осажденной фазы в направлении нормали к этой границе.

Поскольку размыв дна происходит медленно, то задачу можно считать квазистационарной, а ее решение совпадающим по форме с решением стационарной задачи, в котором величины μ и ρ необходимо заменить на

$$\mu(H) = \mu_0 + \frac{\mu_1-\mu_0}{H_1}H, \quad \rho(H) = \rho_0 + \frac{\rho_1-\rho_0}{H_1}H,$$

где постоянные величины с индексами ноль и единица характеризуют течение в начале и в конце процесса размыва.

После подстановки разложений (3) в условие (8) получим

$$\frac{dH}{dt} = -\chi\mu u_0'(H) = -\frac{3\chi\mu Q}{(h-H)^2}, \tag{9}$$

$$\frac{d\psi_{1k}}{dt} = -\chi\mu(u_{1k}'(H) + u_0''\psi_{1k} - a_k v_{2k}(H)),$$

$$\frac{d\psi_{2k}}{dt} = -\chi\mu(u_{2k}'(H) + u_0''\psi_{2k} + a_k v_{1k}(H)). \tag{10}$$

Подставляя решение (9) в правые части (10), придем к системе уравнений для определения функций $\psi_{1k}(t)$, $\psi_{2k}(t)$.

Разделяя переменные в уравнении (9), находим

$$\int_0^H \frac{(h-H)^2}{\chi\mu}dH = -3Qt. \tag{11}$$

Если произведение коэффициентов $\chi\mu$ слабо зависит от H [3], то из (11) получим

$$(h-H)^3 - h^3 = 9\chi\mu Qt. \tag{12}$$

Формулами (11), (12) определяется время размыва слоя осажденной фракции толщины $(-H)$. Формула (12) с точностью до обозначений совпадает с соответствующей формулой работы [3], полученной другим методом.

1. Кольга Д.Ф., Шило И.Н., Конон П.Н. и др. // Агропанорама. 2006. № 2. С. 2.
2. Кольга Д.Ф., Казаровец Н.В., Конон П.Н. и др. // Там же. 2007. № 2. С. 6.
3. Кольга Д.Ф., Казаровец Н.В., Савчук В.П. и др. // Там же. 2007. № 4. С. 2.
4. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1955.

Поступила в редакцию 09.06.08.

Владимир Петрович Савчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Ольга Николаевна Вярьвильская – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.