Математика
и информатика

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, А.В. КРУПОДЕРОВ

К ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РЕГИОНЕ ВЕДЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ГОРНЫХ РАБОТ

The method of studying of displacements of Earth surface caused by influence of large-scale mining works is proposed. This method based on fundamental solutions of mechanics of continuum media. We carry out analysis of obtained results and compare it with experimental data.

Проблема моделирования и прогнозирования воздействия крупномасштабных подземных горных работ (например, извлечение полезных ископаемых, подземное инженерное строительство и др.) на земную поверхность является актуальной и важной. Так, например, неправильная оценка величин и характера смещений земной поверхности может привести к значительным негативным последствиям для всей наземной инфраструктуры региона.

К настоящему времени существует достаточно большое количество подходов и методов расчета перемещений (сдвижений) земной поверхности от ведения подземных горных работ [1].

В данной статье описывается дальнейшее развитие разрабатываемого нами метода расчета сдвижений земной поверхности, основанного на использовании фундаментальных решений механики сплошных сред [2, 3].

В основе метода лежит следующая феноменологическая модель: так как любая искусственная полость (выработка) в массиве вносит возмущение в исходное НДС, то ее воздействие на земную поверхность и приповерхностные области можно моделировать некоторыми усилиями, действующими в массиве.

Опишем предложенную технологию, опирающуюся на использование фундаментальных решений механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Так как изучается влияние горных пород на земную поверхность и приповерхностные области массива, то породный массив с точки зрения механики деформируемого твердого тела можно моделировать упругим/вязкоупругим полупространством (полуплоскостью). В связи с этим построение функциональных выражений для решений рассматриваемого класса задач может основываться на фундаментальных решениях теории упругости для пространства (полупространства) и плоскости (полуплоскости). Мы будем опираться на следующие фундаментальные решения [3].

Решение Миндлина (решение о воздействии сосредоточенной силы в изотропном упругом полупространстве, перпендикулярной поверхности данного полупространства и приложенной на глубине h):

$$u_1 = \frac{x_1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left(\frac{x_3-h}{R_1^3}-\frac{x_3+h}{R_2^3}\right)-\frac{1}{4\pi\mu}\left[x_3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+(1-2\nu)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right],$$

$$u_2 = \frac{x_2}{16\pi\mu(1-\nu)}\left(\frac{x_3-h}{R_1^3}-\frac{x_3+h}{R_2^3}\right)-\frac{1}{4\pi\mu}\left[x_3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+(1-2\nu)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right],$$

$$u_3 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{(x_3-h)^2}{R_1^3}-\frac{(x_3+h)^2}{R_2^3}+(3-4\nu)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]+\frac{1-\nu}{2\pi\mu}\Phi-\frac{x_3}{4\pi\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \qquad (1)$$

где $$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{R_2} + \frac{h}{2(1-\nu)} \frac{x_3 + h}{R_2^3},\ x_3 > 0,\ \ \Omega(\mathbf{x}) = \ln\left(R_2 + x_3 + h\right) - \frac{h}{2(1-\nu)} \frac{1}{R_2},$$

$R_i = \sqrt{r^2 + (x_3 + (-1)^i h)^2}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Аналог решения Миндлина для трансверсально-изотропной среды можно записать в таком виде [4]:

$$\begin{gathered} u_1 = \sum_{i=1}^{2} \left(\operatorname{Sign}(x_3 - h) \frac{a_i x_1}{R_{ii}(R_{ii} + s_i \,|\, x_3 - h \,|)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{A_{ij} x_1}{r_{ij}(r_{ij} + z_{ij})} \right), \\ u_2 = \sum_{i=1}^{2} \left(\operatorname{Sign}(x_3 - h) \frac{a_i x_2}{R_{ii}(R_{ii} + s_i \,|\, x_3 - h \,|)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{A_{ij} x_2}{r_{ij}(r_{ij} + z_{ij})} \right), \\ u_3 = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left(\frac{a_i}{R_{ii}} + \sum_{j=1}^{2} \frac{A_{ij}}{r_{ij}} \right), \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$s_i = \sqrt{\frac{(C - c_{13})(C + c_{13} + 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}} + (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{(C + c_{13})(C - c_{13} - 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}},\ i = \overline{1,2},$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}},\ C = \sqrt{c_{11}c_{33}}.$$

Здесь, в свою очередь, $(c)_{ij}, i, j = \overline{1,6}$, – матрица упругих констант, связывающая напряжения с деформациями, т. е. $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$ с $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$.

В общем случае эффективные упругие параметры массива таковы, что $s_1 \neq s_2$. Тогда с учетом данного обстоятельства величины, входящие в формулы (2), имеют следующий вид (частный случай $s_1 = s_2$ приведен в [4]):

$$R_{ij} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + Z_{ij}},\ r_{ij} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z_{ij}},\ Z_{ij} = s_i x_3 - H_j,\ z_{ij} = s_i x_3 + H_j,$$

$$H_i = s_i h,\ a_1 = \frac{c_{13} + c_{44}}{4\pi c_{33} c_{44} (s_2^2 - s_1^2)},\ a_2 = -a_1,$$

$$A_{11} = -a_1 \frac{w_1 v_2 + v_2 w_1}{\Delta},\ A_{12} = -2a_2 \frac{v_2 w_2}{\Delta},\ A_{21} = 2a_1 \frac{v_1 w_1}{\Delta},\ A_{22} = A_{11},$$

$$w_i = k_i c_{66},\ v_i = c_{33} \alpha_i s_i - c_{13},\ k_i = \frac{\alpha_i + s_i}{s_3^2},\ \alpha_i = \frac{c_{11} - c_{44} s_i^2}{(c_{13} + c_{44}) s_i^2}.$$

Используя указанные фундаментальные решения (1) и (2), можно построить решение для нагрузки, распределенной по произвольной площади. Применительно к анализируемому классу прикладных задач достаточно рассмотреть нагрузку, распределенную по площадке, параллельной поверхности полупространства. В этом случае выражение для компонент перемещений, вызванных такой нагрузкой, можно записать в следующем виде:

$$U_i(x, y, z) = \iint_S u_i(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Здесь через U_i обозначены компоненты перемещений, вызванные распределенной нагрузкой, а u_i – компоненты, являющиеся следствием воздействия сосредоточенной силы и определяемые (1) или (2), *f*(*x*,*y*) – плотность нагрузки, распределенной по площади *S*.

На основе предложенной модели были разработаны технология и алгоритмы численного решения сформулированной задачи, на базе которых, в свою очередь, была выполнена серия численных экспериментов, направленных на определение вида функции *f*(*x*,*y*) и оценки точности и адекватности моделей, базирующихся на фундаментальном решении изотропной (1) и трансверсально-изотропной среды (2).

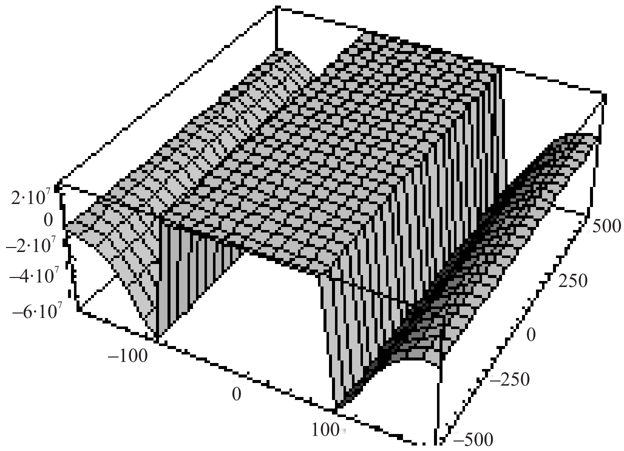

Рис. 1. Функция нагрузки в массиве, заменяющая выработанное пространство

Исходя из механического смысла прикладной задачи, установлено, что нагрузку можно прикладывать на естественной глубине залегания выработки. При этом функция плотности нагрузки коррелирует с реальным распределением напряжений возле выработки. Предлагается следующий вид для функции $f(x,y)$:

$$f(x_1, x_2) = d\begin{cases} 1, \quad \text{if } |x_1| < width, \\ ax_1^2 + bx_1 + c, \text{if } width < |x| < mp, \\ md\ e^{-(x_1 - mp)/\sigma^2}, \ \text{if } mp < |x| < zer, \\ 0, \quad \text{if } |x_1| > zer. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь *width* – ширина выработанного пространства, *mp* – координата расположения точки максимума опорного давления, *md* – отношение максимального опорного давления к давлению над выработкой, *zer* – граница зоны опорного давления (в нашем случае рассчитывается по формулам, предложенным в [5]). Параметры *a, b, c* в (3) выбираются из условия непрерывности и гладкости нагрузки в точке максимума опорного давления, а также из условия ее непрерывности на контуре выработки. График нагрузки имеет следующий вид (рис. 1).

При проведении численных экспериментов были взяты эффективные характеристики массива, соответствующие условиям Старобинского месторождения калийных солей: $E_1 = E_2 = 5$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $G_2 = 0{,}28462$ ГПа.

Вычисление интегралов проводилось с помощью пакета Mathematica. Основа экспериментов состояла в соответствующем выборе параметров величины максимального давления и значения σ (3), а также точки расположения максимального давления.

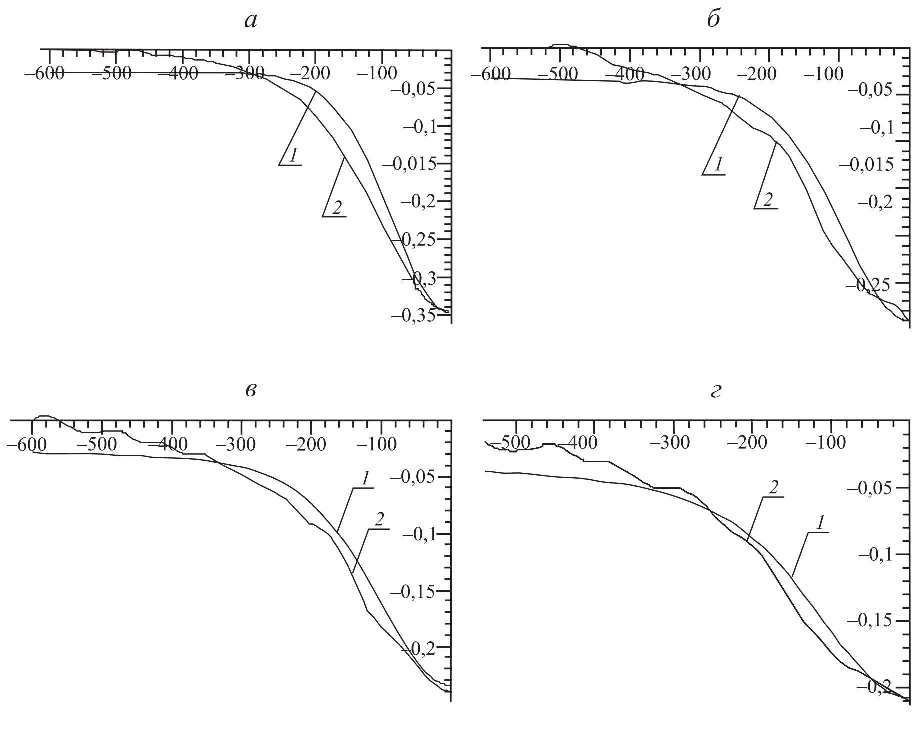

Рис. 2. Результаты вычислений для случая одиночного выемочного блока на глубине: *а* – 600, *б* – 700, *в* – 800, *г* – 900 м

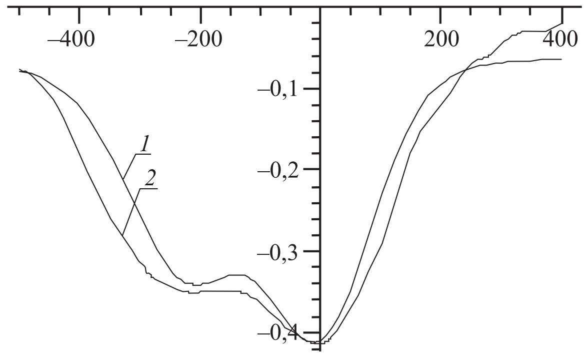

Рис. 3. Результаты вычислений для случая двух выемочных блоков

По результатам проведенных численных экспериментов определены коэффициенты формулы (3). Так, например, для условий отработки третьего горизонта Старобинского месторождения калийных солей (диапазон изучаемых глубин составил [600 м, 1000 м]) показано, что значения коэффициентов d и mp не зависят от глубины: d=37372736,5; mp=$width$+5,1.

В результате выполнения большого количества вычислений установлено, что трансверсально-изотропная среда во всех случаях более адекватно описывает процессы сдвижений земной поверхности, чем модель, базирующаяся на фундаментальном решении Миндлина для изотропной среды.

Примеры кривых оседаний земной поверхности, построенных на основе предложенных аналитических выражений и на базе инженерной прикладной методики, в основу которой положена обработка данных натурных экспериментов [6], представлены на рис. 2 и 3. На рисунках кривые *1* соответствуют вычислениям на основе предложенной модели, использующей фундаментальное решение для трансверсально-изотропной среды, а кривые *2* − построенным с помощью инженерной методики для аналогичных условий.

На рис. 2 приведены данные для случая наличия в массиве одиночного выемочного блока, находящегося на разных глубинах, на рис. 3 – двух выемочных блоков, расположенных на разных глубинах: один – на глубине 600 м, другой − на глубине 700 м, и смещенных один по отношению к другому на 150 м.

Из рисунков видно, что теоретические кривые хорошо коррелируют с кривыми, построенными на основе прикладной методики, базирующейся, в свою очередь, на данных натурных измерений.

1. Журавков М.А., Стагурова О.В. Геомеханический мониторинг горных массивов. Мн., 2002.

2. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Мн., 1995.

3. Журавков М.А., Круподеров А.В. // Горная механика. 2007. № 2.

4. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Springer, 2006.

5. Журавков М.А., Николаев Ю.Н., Губанов В.А. О методах исследования закономерностей формирования и распределения опорного давления при разработке калийных месторождений пологого залегания. Мн., 1991.

6. Степанов К.А., Журавков М.А., Невельсон И.С. и др. Указания по охране сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок в условиях Старобинского месторождения калийных солей. Солигорск, 2002.

Поступила в редакцию 22.02.08.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Андрей Валентинович Круподеров – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – М.А. Журавков.