УДК 681.5:519.711.3

МЭН ЦИНСУН (КНР), К.М. ШЕСТАКОВ

МЕТОД УПРОЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СЛОЖНЫХ СБАЛАНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

The way of reduction of combined equations actual at preparation of mathematical model of objects in training simulator complexes is shown. Approximation is effected by means of approximation of the transfer function matrixes by the simplified and initial models of the systems.

Упрощение моделей сложных и многомерных систем представляет собой важную научно-исследовательскую задачу для их разработчиков и специалистов, создающих тренажерные комплексы. Упрощение модели может дать разумные подходы, методы для анализа и проектирования таких комплексов. Существующие способы упрощения моделей не могут обеспечивать устойчивость систем при заданной точности. В 1981 г. американский ученый Брус Мур создал метод сбалансированного упрощения для полностью управляемых и наблюдаемых систем с асимптотической устойчивостью [1]. В данной статье на основании теории сбалансированного упрощения проведена аппроксимация моделей для линейных и поливариантных систем, улучшена и степень приближения решений к реакциям исходных систем.

1. Основы сбалансированного упрощения

Мур впервые разработал метод сбалансированного упрощения, используя понятия управляемости и наблюдаемости систем, создав так называемые основы осуществления внутреннего балансирования. Исходя из этих основ, можно сформировать упрощенную модель линейной системы с асимптотической устойчивостью.

1.1. Ключевые понятия внутренних сбалансированных систем

Учитываем линейную и поливариантную систему S_1:

$$S_1:\begin{cases}\dot{X} = AX + BU,\\ Y = CX,\end{cases} \tag{1}$$

где $X \in R^{n\times 1}, U \in R^{m\times 1}, Y \in R^{p\times 1}$ – векторы фазовых координат, управляющих и регулируемых величин соответственно; A, B, C – матрицы постоянных коэффициентов. Получаем матрицу передаточной функции данной системы

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \tag{2}$$

Грамиан-матрица: это матрица, элементами которой являются попарные скалярные произведения системы векторов, проверяемых на линейную независимость. Такую матрицу называют еще матрицей Грама для системы векторов. Грамиан-матрица – положительно-определенная симметричная матрица с действительными и неотрицательными собственными значениями и соответствующими им попарно ортогональными собственными векторами.

Управляемая грамиан-матрица: это расширенная трактовка матрицы Грама применительно к системе функций, являющихся состояниями линейной динамической системы. Управляемую грамиан-матрицу можно найти из приведенного ниже уравнения Ляпунова.

Описание системы в пространстве состояний называется ортогональным по входу, если она обладает диагональной управляемой грамиан-матрицей.

Наблюдаемая грамиан-матрица: согласно принципу дуальности Калмана в рассмотрение вводится дуальная система, переменные состояния которой образуют свою матрицу Грама в сходных приведенным выше условиях. Наблюдаемую грамиан-матрицу можно найти из приведенного ниже уравнения Ляпунова.

Описание системы в пространстве состояний называется ортогональным по выходу, если она обладает диагональной наблюдаемой грамиан-матрицей.

Обычно предполагают управляемую и наблюдаемую грамиан-матрицы в следующей форме:

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt, \tag{3}$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt. \tag{4}$$

Полностью управляемость и полностью наблюдаемость системы S_1 эквивалентны с обратимостью грамиан-матриц W_c и W_o, т. е. система S_1 является минимальной реализацией. Предположим, система S_1 (1) полностью управляема и полностью наблюдаема с асимптотической устойчивостью, матрица W_c и матрица W_o – положительно-определенные эрмитовы матрицы, т. е. $W_c^* = W_c > 0, W_o^* = W_o > 0$ и они удовлетворяют следующим уравнениям Ляпунова:

$$W_cA^T + AW_c + BB^T = 0,$$

$$W_oA + A^TW_o + C^TC = 0.$$

Тогда система S_1 асимптотически устойчива (т. е. $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0,\ i = 1, 2, ..., n$), полностью управляема и полностью наблюдаема при $\lambda_i(W_cW_o) > 0,\ i = 1, 2,..., n.$ Сингулярные числа σ_i для системы S_1:

$$\sigma_i(G(s)) = (\lambda_i(W_cW_o))^{1/2}. \tag{5}$$

Можно доказать, что посредством линейного преобразования матрицы они поддерживают постоянные значения.

Если $W_c = W_o$ и они – диагональные матрицы, то систему S_1 называют сбалансированной. Но эти условия обычно не удовлетворены. А для полностью управляемых и полностью наблюдаемых систем с асимптотической устойчивостью всегда существует одно линейное преобразование с матрицей T такое, что система S_1 является сбалансированной. Предположим $X = T\hat{X}$, значит, система S_1 будет сформирована в следующей форме:

$$S_2: \begin{cases} \dot{\hat{X}} = \hat{A}\hat{X} + \hat{B}U, \\ Y = \hat{C}\hat{X}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \hat{B} = T^{-1}B, \ \hat{C} = CT, \ T \in R_n^{n\times n} \tag{7}$$

– трансформирующая матрица.

Итак, имеем $e^{\hat{A}t}\hat{B} = T^{-1}e^{At}B, \hat{C}e^{\hat{A}t} = Ce^{At}T.$

Получим

$$\hat{W}_c = \int_0^\infty e^{\hat{A}t}\hat{B}\hat{B}^T e^{\hat{A}^T t}dt = T^{-1}(\int_0^\infty e^{At}BB^T e^{A^T t}dt)T^{-T} = T^{-1}W_c T^{-T},$$

$$\hat{W}_o = \int_0^\infty e^{\hat{A}^T t}\hat{C}^T\hat{C}e^{\hat{A}t}dt = T^T(\int_0^\infty e^{A^T t}C^T Ce^{At}dt)T = T^T W_o T.$$

Так, при соответствующем выборе формы матрицы T для системы S_1 грамиан-матрицы W_c и W_o могут быть преобразованы в матрицы $\hat{W}_c$, $\hat{W}_o$, и в то же время матрицы $\hat{W}_c, \hat{W}_o$ – диагональны и равны между собой. Приведем алгоритм для получения матрицы T, чтобы $\hat{W}_c = \hat{W}_o$ и были диагональными.

Если система S_1 минимально реализуемая с асимптотической устойчивостью, тогда W_c, W_o – положительно-определенные эрмитовы матрицы.

Исходя из разложения Холецкого, матрица W_o может быть разложена в следующую форму:

$$W_o = R^T \cdot R,$$

где матрица R – верхняя треугольная.

Видимо, RW_cR^T тоже положительно-определенная эрмитова матрица и может быть диагонализуема:

$$RW_cR^T = U_1\Sigma^2U_1^T,$$

где $U_1 \cdot U_1^T = U_1^T \cdot U_1 = I_n$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_n > 0$, σ_i – i-е сингулярное число.

Если обозначаем $T^{-1} = \Sigma^{-1/2}U_1^T R$, то

$$\hat{W}_c = T^{-1}W_cT^{-T} = \Sigma^{-1/2}U_1^T RW_cR^T U_1\Sigma^{-1/2} = \Sigma,$$
$$\hat{W}_o = T^T W_o T = \Sigma^{1/2}U_1^T(R^T)^{-1}W_oR^{-1}U_1\Sigma^{1/2} = \Sigma.$$

Далее получено $\hat{W}_c = \hat{W}_o = \Sigma.$

Такую систему называем внутренней сбалансированной.

1.2. Внутренняя господствующая подсистема сбалансированной системы

Предполагаем, что модель сбалансированной системы разложена в следующую форму:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}}_1 \\ \dot{\hat{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \cdot U,$$

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix},$$

где $\hat{A}_{11} \in R^{k\times k}, \hat{A}_{22} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, $\hat{X}_1 \in R^{k\times 1}, \hat{X}_2 \in R^{(n-k)\times 1}$.

Пусть $\hat{X}_1 = T_1\tilde{X}_1, \hat{X}_2 = T_2\tilde{X}_2$, где $T_1 \in R^{k\times k}, T_2 \in R^{(n-k)\times(n-k)}$. Получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}}_1 \\ \dot{\tilde{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1}\hat{A}_{11}T_1 & T_1^{-1}\hat{A}_{12}T_2 \\ T_2^{-1}\hat{A}_{21}T_1 & T_2^{-1}\hat{A}_{22}T_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^{-1}\hat{B}_1 \\ T_2^{-1}\hat{B}_2 \end{bmatrix} \cdot U, \tag{8}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1T_1 & \hat{C}_2T_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $V_1 = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times k}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-k} \end{bmatrix}_{n\times(n-k)}$ и $\tilde{X}_1 = T_1^{-1}V_1^T e^{\hat{A}t}\hat{B} \in R^{k\times m}$, $\tilde{Y}_1 = \hat{C}e^{\hat{A}t}V_1T_1 \in R^{p\times k}$, получаем

$$\int_0^\infty \tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_1^T dt = T_1^{-1}(V_1^T\hat{W}_cV_1)T_1^{-T},$$

$$\int_0^\infty \tilde{Y}_1^T \cdot \tilde{Y}_1 dt = T_1^T(V_1^T\hat{W}_oV_1)T_1.$$

А для $\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2$ сходное же представление может быть получено (только V_2, T_2 вместо V_1, T_1). Это значит, что можно выбрать соответствующую матрицу T_1, чтобы главные компоненты матриц $\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1$ были расположены по убыванию амплитуд:

$$\int_0^\infty \tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_1^T dt = \int_0^\infty \tilde{Y}_1^T \cdot \tilde{Y}_1 dt = \tilde{\Sigma}_1 = \mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, ..., \tilde{\sigma}_k). \tag{10}$$

Одинаково можно выбрать матрицу T_2, чтобы было удовлетворено следующее уравнение:

$$\int_0^\infty \tilde{X}_2 \cdot \tilde{X}_2^T dt = \int_0^\infty \tilde{Y}_2^T \cdot \tilde{Y}_2 dt = \tilde{\Sigma}_2 = \mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+2}, ..., \tilde{\sigma}_n). \tag{11}$$

Определение 1. Тогда и только тогда, когда формула (10) удовлетворена, модель (8) и (9) сбалансирована по $\hat{X}_1$; тогда и только тогда, когда формула (11) удовлетворена, модель (8) и (9) сбалансирована по $\hat{X}_2$.

Если модель системы S_2 может преобразоваться в формы (8) и (9), то система S_2 называется сбалансированной по $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$.

Определение 2. Система $S_3 : \{\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1\}$ называется внутренней господствующей тогда и только тогда, когда модель исходной системы S_1 сбалансирована по $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$ после эквивалентного преобразования, и удовлетворено $\|\tilde{\Sigma}_1\|_F >> \|\tilde{\Sigma}_2\|_F$.

Пусть система $S_2 : \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ – внутренняя сбалансированная, $\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)$, $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, ..., \sigma_n)$. Легко узнать: система S_2 сбалансирована по $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$, $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_1$, $\tilde{\Sigma}_2 = \Sigma_2$. Учитывая определение нормы F, получен следующий вывод: у системы S_2 существует одна внутренняя господствующая k-мерная подсистема тогда и только тогда, когда удовлетворено

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2\right)^{1/2} >> \left(\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2},$$

где σ_i – сингулярное число, $i = 1, 2, ..., n$.

1.3. Метод сбалансированного упрощения Мура

После сбалансированного преобразования предположим разделение уравнения системы по фазовым координатам на две части в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}}_1 \\ \dot{\hat{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \cdot U,$$

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где $\hat{X}_1 \in R^{k\times 1}, \hat{X}_2 \in R^{(n-k)\times 1}$, $\hat{A}_{11} \in R^{k\times k}, \hat{A}_{22} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, $\hat{B}_1 \in R^{k\times m}, \hat{C}_1 \in R^{p\times k}$.

Будем считать: если $\sigma_{k+1} << \sigma_k$, то компоненты фазовых координат $\hat{X}_2$ почти не влияют на выходные действия системы, т. е. отбрасывание слабой части из управляемых и наблюдаемых состояний на действия системы мало влияет. Система $S_3 : \left\{ \hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1 \right\}$ является хорошим приближением к исходной системе. Так, матрица $G_r(s)$ передаточной функции для модели низкого порядка представлена в следующей форме: $G_r(s) = \hat{C}_1 (sI_k - \hat{A}_{11})^{-1} \hat{B}_1$.

Это и есть метод внутреннего сбалансированного упрощения.

1.4. Устойчивость, анализ погрешности и критерий упрощения

1.4.1. Устойчивость упрощенной модели

Устойчивость метода сбалансированного упрощения доказывается следующими выводами.

Теорема 1. Если в диагональных матрицах Σ_1 и Σ_2 для сбалансированной системы не существует общего диагонального члена, то устойчивость подсистемы асимптотическая (доказательство теоремы 1 см. в [1]).

Из этой теоремы можно прийти к двум выводам:

1) если сингулярные числа для Σ различны, то устойчивость каждой подсистемы асимптотическая;

2) всегда можно получить модель низкого порядка с управляемостью, наблюдаемостью и асимптотической устойчивостью, используя метод внутреннего сбалансированного упрощения. Это значит, что такой метод внутреннего сбалансированного упрощения может поддерживать устойчивость системы.

1.4.2. Анализ погрешности упрощенной модели

Обозначим:

1) наибольшее сингулярное число матрицы $A \in R^{n \times n}$ знаком $\overline{\sigma}(A)$, т. е. $\overline{\sigma}(A) = \lambda_{\max}^{1/2}(A^T A)$;

2) матрицу передаточной функции для исходной системы знаком $G(s)$, матрицу передаточной функции для упрощенной системы после применения метода внутреннего сбалансированного упрощения знаком $G_r(s)$: $G_r(s) = \hat{C}_1 (sI - \hat{A}_{11})^{-1} \hat{B}_1$;

3) предел погрешности знаком $E_\infty = \left\| G(s) - G_r(s) \right\|_\infty = \sup\limits_{\omega} \overline{\sigma} \left[G(j\omega) - G_r(j\omega) \right]$.

Теорема 2. Предел погрешности для метода внутреннего сбалансированного упрощения представим в следующей форме:

$$E_\infty = \left\| G(s) - G_r(s) \right\|_\infty \le 2tr(\Sigma_2)$$

и определен, если $r = n - 1$, т. е. $\left\| G(s) - G_r(s) \right\|_\infty = 2\sigma_n$ (доказательство теоремы 2 см. в [2]).

1.4.3. Критерий упрощения

Доказано [3], что всякая система с асимптотической устойчивостью может быть преобразована в сбалансированную систему посредством эквивалентного оператора матрицы, а ее сингулярные числа являются амплитудами главных компонентов функции веса.

Пусть квадратные интегралы функций веса для сбалансированной и упрощенной систем представлены в следующей форме:

$$J = \int_0^\infty C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T dt,$$

$$J_R = \int_0^\infty C_R e^{A_R t} B_R B_R^T e^{A_R^T t} C_R^T dt.$$

Если сбалансированная система $\{A, B, C\}$ и одна ее подсистема $\{A_R, B_R, C_R\}$ удовлетворяют

$$\frac{\|E\|}{\|J\|} << 1, \qquad (13)$$

то подсистема $\{A_R, B_R, C_R\}$ приближается к системе $\{A, B, C\}$, где $E = J - J_R$.

С использованием этой нормы формула (13) может быть представлена

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} c_{ik} c_{ij} \sigma_i \right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ik} c_{ij} \sigma_i \right)^2} \right)^{1/2} << 1,$$

где c_{ij}, c_{ik} – элементы матрицы C, σ_i – сингулярное число для исходной системы.

2. Упрощение моделей сбалансированных систем

Используя метод упрощения модели, решим следующие задачи: во-первых, преобразуем динамические уравнения в форму сбалансированной системы; во-вторых, определим порядок упрощенной системы.

Согласно критерию (13) упрощения после отсечения подсистем, соответствующих малым сингулярным числам σ_i $(i = k+1, k+2, ..., n)$ (т. е. $(n-k)$ фазовым координатам со слабой управляемостью и наблюдаемостью), получим k-мерную модель упрощения. Таким образом, опускаем значения с малыми сингулярными числами, дающие небольшие возмущения, т. е. считаем их за нуль. Затем по формуле (12) получим

$$\begin{cases} 0 = \hat{A}_{21}\hat{X}_1 + \hat{A}_{22}\hat{X}_2 + \hat{B}_2 U, \\ \dot{\hat{X}}_1 = \hat{A}_{11}\hat{X}_1 + \hat{A}_{12}\hat{X}_2 + \hat{B}_1 U, \\ Y = \hat{C}_1\hat{X}_1 + \hat{C}_2\hat{X}_2. \end{cases} \tag{14}$$

Далее рассмотрим два случая.

1. Если $\hat{A}_{22}$ обратима и $\sigma_k >> \sigma_{k+1}$ $(k < n)$, то после исключения состояний $\hat{X}_2$ из формулы (14) получим

$$S_4 : \begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = A_R\hat{X}_1 + B_R U, \\ Y = C_R\hat{X}_1 + D_R U, \end{cases}$$

где $\hat{X}_1 \in R^{k\times 1}$, а A_R, B_R, C_R, D_R – постоянные матрицы, $A_R = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21}$, $B_R = \hat{B}_1 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}\hat{B}_2$, $C_R = \hat{C}_1 - \hat{C}_2\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21}$, $D_R = -\hat{C}_2\hat{A}_{22}^{-1}\hat{B}_2$.

2. Если $\hat{A}_{22}$ не обратима, то заменим матрицу $\hat{A}_{22}^{-1}$ матрицей $\hat{A}_{22}^{+}$ (обобщенной обратной матрицей).

Нетрудно заметить, что упрощенная модель S_4 может поддерживать установившиеся значения исходной системы. Но из-за того, что матрица $(D_R = -\hat{C}_2\hat{A}_{22}^{-1}\hat{B}_2)$ в принципе не равна нулевой матрице в исходной системе, первоначальные значения выходных величин системы при модели S_4 не равны нулевым значениям исходной системы.

3. Аппроксимация данных по выходным характеристикам упрощенной модели

Чтобы получить равные первоначальные значения и приближенные установившиеся значения для упрощенной модели S_4 по сравнению с моделью исходной системы S_1, необходимо вести поправку на форму S_4 следующим образом.

Сначала записываем упрощенную модель S_4 в форме (15), затем ведем аппроксимацию данных по матрицам передаточной функции.

$$S_5 : \begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = A_R\hat{X}_1 + B_R U, \\ Y = C'_R\hat{X}_1, \end{cases} \tag{15}$$

где $C'_R \in R^{p\times k}$. Необходимо удовлетворить следующему условию, чтобы обеспечить равные или более приближенные установившиеся значения для этих двух моделей (S_1 и S_5):

$$\left[CA^{-1}B \quad CA^{-2}B \quad \cdots \quad CA^{-j}B \right] = C'_R\left[A_R^{-1}B_R \quad A_R^{-2}B_R \quad \cdots \quad A_R^{-j}B_R \right],\ j = 1, 2, ..., \tag{16}$$

где $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = -\sum_{i=0}^{\infty} CA^{-i-1}Bs^i$, $G_R(s) = C'_R(sI_k - A_R)^{-1}B_R = -\sum_{i=0}^{\infty} C'_R A_R^{-i-1}B_R s^i$ – матрицы передаточной функции для моделей S_1 и S_5.

Пусть
$$C'_R = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1k} \\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{p1} & c'_{p2} & \cdots & c'_{pk} \end{bmatrix}_{p\times k}.$$

Это значит, что уравнение матрицы (16) содержит $p \times k$ неизвестных величин ($c'_{ij}, i = 1, 2,..., p, j = 1, 2,..., k$), $p \times (j \times m)$ скалярных уравнений. Необходимо решить уравнение матрицы (16), чтобы получить матрицу C'_R и окончательную упрощенную модель S_5.

Рассмотрим задачу решения уравнения матрицы (16) в двух случаях.

Случай 1. Если $k / m = j$, а j равно целому числу, то матрица C'_R определена единственно после отсечения первых j столбцов в уравнении матрицы (16).

Случай 2. Если $k / m = j$, а j неравно целому числу, то после отсечения первых k столбцов получим близкие решения уравнения матрицы (16). Кстати, еще можно использовать метод наименьших квадратов для решения уравнения матрицы (16).

4. Последовательность программирования для упрощения модели

Исходя из указанного метода при упрощении, необходимо:

1) определить асимптотическую устойчивость, полностью управляемость и полностью наблюдаемость исходной системы S_1. Если все «да», то перейти к следующему шагу;

2) преобразовать систему S_1 в сбалансированную S_2 в формулах (6) и (7) при помощи подобного преобразования матрицы;

3) получить модель системы S_3 по (12), представленную после разделения состояний системы на две части;

4) по распределению сингулярных чисел системы определить порядок упрощенной модели S_5;

5) решить уравнение матрицы в формуле (16) и определить неизвестную матрицу C'_R;

6) получить окончательную упрощенную модель S_5;

7) вести математическую имитацию, к примеру, с помощью программы Matlab 6.5.

5. Пример имитации

Динамическая модель системы известна в следующей матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u_1, \\ \dot{x}_4 = -4x_4 + u_1, \\ \dot{x}_5 = -5x_5 - u_1, \\ \dot{x}_6 = -6x_6 + u_1, \\ \dot{x}_7 = -7x_7 + u_1, \\ \dot{x}_8 = -8x_8 - u_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 12x_6 + 14x_7 + 8x_8, \\ y_2 = x_1, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ – фазовые координаты системы, u_1 – управляющая величина, y_1, y_2 – регулируемые величины.

Определив устойчивость, управляемость и наблюдаемость данной системы, получим сингулярные числа при помощи команд Matlab svd=sqrt(eig(Wc*Wo)) (см. (5)):

svd = 1,2615; 0,8547; 0,0257; 0,0020; 0,0002; 0,0000; 0,0000; 0,0000.

По распределению этих сингулярных чисел выбираем порядок упрощенной системы – 2 (k=2), в это время первые два сингулярных числа составляют $\sum_{i=1}^{2} \sigma_i / \sum_{j=1}^{8} \sigma_j \approx 98{,}7$ %.

После сбалансированного преобразования матрицы получаем модель системы S_3 по формуле (12):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6{,}2540x_1 - 1{,}0479x_2 + 3{,}9722u_1, \\ \dot{x}_2 = 2{,}9571x_1 - 0{,}2979x_2 - 0{,}7136u_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3{,}9546x_1 - 0{,}3630x_2, \\ y_2 = 0{,}3742x_1 + 0{,}6144x_2. \end{cases}$$

После исключения $\hat{X}_2$ в формуле (14) получаем модель системы S_4:

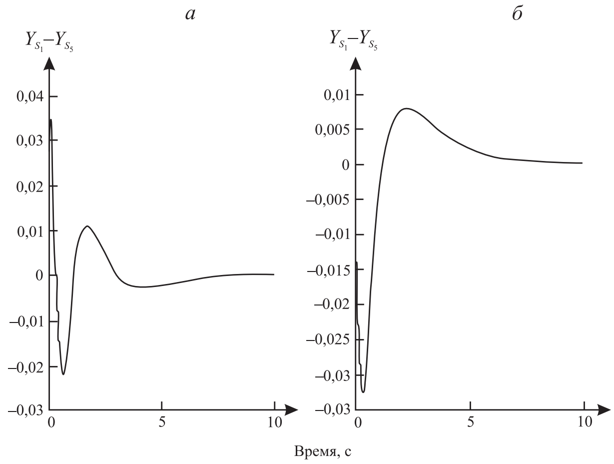
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5,8893x_1 - 1,1435x_2 + 3,8547u_1, \\ \dot{x}_2 = 2,8502x_1 - 0,2699x_2 - 0,6792u_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3,8280x_1 - 0,3298x_2 + 0,0408u_1, \\ y_2 = 0,4529x_1 + 0,5937x_2 - 0,0253u_1. \end{cases}$$

После аппроксимации данных по матрицам передаточной функции получаем упрощенную модель S_5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5,8893x_1 - 1,1435x_2 + 3,8547u_1, \\ \dot{x}_2 = 2,8502x_1 - 0,2699x_2 - 0,6792u_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3,8969x_1 - 0,3195x_2, \\ y_2 = 0,4421x_1 + 0,5790x_2. \end{cases}$$



Графики разностей переходных функций между моделями систем S_1 и S_5 ($k = 2$): *а* – y_1 от u_1, *б* – y_2 от u_1

С помощью программы Matlab получим графики разностей переходных функций между моделями систем S_1 и S_5 (k=2, рисунок).

Исходя из приведенных графиков, модель S_5 хорошо согласуется с исходной системой.

Таким образом, посредством метода аппроксимации данных модель линейной и поливариантной системы упрощена на основании сбалансированного преобразования системы. Данный метод упрощения математических моделей систем позволяет повышать точность приближения упрощенной модели к исходной по переходным и установившимся значениям, ускорять реакцию систем на действия органов управления и изменения окружающей среды, облегчать проектирование систем управления при теоретическом синтезе. Указанный теоретический анализ и имитация примера доказывают эффективность использования метода упрощения.

1. Moore B.C. // IEEE Trans. Automatic Contr. AC-26. 1981(1). P. 17.
2. Enns D.F. // Proc. 23rd Conf. Decision Contr. Las Vegas, 1984. P. 127.
3. Pernebo L., Silverman L.M. // IEEE. Trans. on Automatic Contr. AC-27. 1982(2). P. 382.

Поступила в редакцию 11.06.08.

Мэн Цинсун – аспирант кафедры интеллектуальных систем. Научный руководитель – К.М. Шестаков.

Константин Михайлович Шестаков – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры интеллектуальных систем.