

УДК 539.122.2

С.Н. СЫТОВА

ДИНАМИКА ГЕНЕРАЦИИ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Mathematical model and numerical methods for Volume Free Electron Laser (VFEL) nonlinear stage simulation proposed and implemented in computer code VOLC allowed to investigate numerically different VFEL regimes. Investigation of chaotic behaviour in two-wave VFEL demonstrated the complicated root to chaos carried out via period-doubling cascade, quasiperiodicity, intermittency and transitions between large-scale and small-scale amplitude regimes.

В настоящее время существует большое количество различных типов генераторов электромагнитного излучения на основе электронных пучков (ЛОВ, ЛБВ, оротрон, МЦР-монотрон, ЛСЭ и др.). Все указанные типы генераторов обладают одной существенной особенностью – инкремент излучательной неустойчивости электронного пучка в комптоновском режиме оказывается пропорциональным $\sqrt[3]{\rho}$, где ρ – плотность пучка [1, 2].

В работах [3–5] была впервые установлена новая закономерность для инкремента излучательной неустойчивости пучка частиц G , пролетающего через пространственно-периодическую мишень. А именно: при возрастании числа волн, возбуждаемых в решетке, для которых одновременно выполнены условия дифракции Брэгга, инкремент излучательной неустойчивости G оказывается пропорциональным не $\sqrt[3]{\rho}$, а $G \sim \sqrt[3+s]{\rho}$, где s – число дополнительных волн, возникающих в системе благодаря дифракции. Данная закономерность означает резкое снижение порогового тока генерации излучения j_{start} с ростом числа s : $j_{\text{start}} \sim \frac{1}{(kL)^{3+2s}}$, где $k = \omega/c$, ω – частота, L – длина резонатора.

Указанная закономерность явилась теоретической основой для создания принципиально нового типа генераторов электромагнитного излучения – объемных лазеров на свободных электронах (ОЛСЭ). Экспериментальные исследования [7, 8] подтвердили правильность теории ОЛСЭ.

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [5, 6], но он быстро сменяется нелинейной стадией, на которой происходит основная генерация излучения. Математические модели, описывающие эту стадию работы, представляют собой системы многомерных нелинейных интегродифференциальных уравнений. Очевидно, что нелинейный режим работы может быть исследован только с использованием методов математического моделирования, поскольку аналитически получить решения таких систем уравнений не представляется возможным.

В 2003–2007 гг. было проведено математическое моделирование ОЛСЭ [9–13], изучены все основные особенности поведения электромагнитных полей в системе. В результате моделирования подтверждено существование новой закономерности, предсказанной в [3–5] и ведущей к радикальному изменению пороговых условий в ОЛСЭ, в частности, численно были исследованы:

- пороги генерации как функции плотности тока пучка, длины мишени, факторов асимметрии дифракции для двух- и трехволновых ОЛСЭ;
- ширина режима усиления как функция плотности тока пучка для двух- и трехволновых ОЛСЭ;
- режим SASE (стимулированное усиление спонтанного излучения);
- электродинамическая картина нелинейной стадии работы ОЛСЭ с внешними зеркалами для различных коэффициентов отражения.

Было показано, что существует оптимальный набор параметров для эффективной генерации излучения в каждом из рассмотренных случаев.

При моделировании мы столкнулись с хаотическим характером нелинейных режимов работы ОЛСЭ [10–13]. Их исследование очень важно, поскольку изменение управляющих параметров через бифуркации ведет к изменению режимов работы ОЛСЭ, когда стационарная генерация сменяется автомодуляцией, а автоколебания далее последовательно усложняются, переходя в стохастические со сплошным спектром. В [10–13] продемонстрирован переход с ростом тока от стадии стационарного нелинейного насыщения к колебательной динамике с последовательным удвоением периода и далее к хаотическому поведению. Моделирование показало совпадение численных результатов с теоретическими расчетами, справедливыми на линейной стадии развития неустойчивости, и теоретическими оценками перехода к бифуркациям. Данная работа посвящена дальнейшему изучению хаотической динамики ОЛСЭ.

Физическая и математическая модели ОЛСЭ

В зависимости от размеров поперечного сечения электронного пучка существуют два типа ОЛСЭ – с ленточным пучком и широким в поперечном сечении пучком. Здесь будем анализировать второй случай.

Резонатор ОЛСЭ фактически представляет собой искусственный (фотонный) кристалл [14]. Поэтому для моделирования ОЛСЭ можно рассмотреть следующую теоретическую модель (рис. 1). Широкий в поперечном сечении релятивистский электронный пучок со скоростью $\mathbf{u}$ «падает» под некоторым углом на полубесконечную трехмерную пространственно-периодическую мишень (резонатор) толщиной L . Электроны пучка начинают испускать спонтанное излучение, которое при одновременном выполнении условий дифракции $2\mathbf{k}_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2 \approx 0$ [15] и условий синхронизма $|\omega - \mathbf{k}_0\mathbf{u}| = \delta\omega \approx 0$ преобразуется в коллективное квазичеренковское излучение с частотой ω и волновыми векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки мишени.

В ОЛСЭ возможны различные режимы работы. Первый – когда величина тока пучка j либо длина системы L меньше критической пороговой и коллективное излучение отсутствует. Следующий – режим

усиления электронным пучком внешних падающих электромагнитных волн – реализуется при достижении критических пороговых величин j или L , когда потери в системе сравниваются с энергией излучения. При дальнейшем увеличении тока или длины системы и превышении ими порогового значения осуществляется режим генерации.

В представленной модели электронный пучок моделируется усреднением по фазам влета релятивистских электронов в область взаимодействия [16]. Этот метод хорошо известен и широко применяется для расчета различных типов ЛОВ, ЛБВ, ЛСЭ и других вакуумных электронных приборов. Как было показано в наших исследованиях [9–11], этот метод также хорошо работает при моделировании динамики пучка в ОЛСЭ. Более того, поскольку выражение для тока пучка получено усреднением по двум фазам – не только по моменту влета пучка в зону взаимодействия, как в [2, 16, 17], но и по координате влета и имеет соответственно более сложный, чем обычно используемый, вид [2, 17], это позволило учесть тонкие эффекты, связанные со взаимодействием пучка и электромагнитного поля в условиях ОРОС.

Итак, система, моделирующая двухволновой ОЛСЭ, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \gamma_0 c \frac{\partial E}{\partial z} + 0,5i\omega l E - 0,5i\omega \chi_{\pm} E_1 &= 2\pi j \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} (\exp(-i\theta(t, z, p)) + \exp(-i\theta(t, z, -p))) dp, \\ \frac{\partial E_1}{\partial t} + \gamma_1 c \frac{\partial E_1}{\partial z} + 0,5i\omega \chi_{\mp} E - 0,5i\omega l_1 E_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta(t, z, p)}{dz^2} &= \frac{e\Phi}{m\gamma^3 \omega^2} \left(k_{0z} - \frac{d\theta(t, z, p)}{dz} \right)^3 \operatorname{Re}(E \exp(i\theta(t, z, p))), \\ \frac{d\theta(t, 0, p)}{dz} &= k_{0z} - \omega/u, \quad \theta(t, 0, p) = p, \quad E(0, t) = E^0, \quad E_1(L, t) = E^1, \end{aligned} \quad (1)$$

$t > 0$, $z \in [0, L]$, $p \in [-2\pi, 2\pi]$. $E(z, t)$ и $E_1(z, t)$ – комплекснозначные амплитуды проходящей и дифрагированной волн. Функция $\theta(t, z, p)$ описывает фазу электронов относительно электромагнитной волны. $\gamma_{0,1}$ – направляющие косинусы ОРОС. $\Phi = \sqrt{l_0 + \chi_0 - 1/(u/c\gamma)^2}$, $\beta = \gamma_0/\gamma_1$ – фактор асимметрии. Системные параметры определяются как $l_i = (k_i^2 c^2 - \omega^2 \epsilon_0)/\omega^2$, $i = 0, 1$; $l = l_0 + \delta$. δ есть отклонение от точного выполнения условия синхронизма. γ – Лоренц-фактор пучка. $\epsilon_0 = 1 + \chi_0$ – диэлектрическая проницаемость среды, χ_0 , $\chi_{\pm}$ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки [15].

Необходимые численные методы для решения системы (1) были разработаны в [9, 11]. Создан комплекс программ VOLC [10] – «инструмент» для моделирования работы экспериментальной физической установки ОЛСЭ, разрабатываемой в НИИЯП БГУ.

Хаос в ОЛСЭ

Хаотическая динамика является широко распространенным свойством огромного класса систем к переходу в состояния, в которых наблюдается как детерминированное поведение, так и непредсказуемость. Хорошо известны примеры хаотической динамики, такие как турбулентность в жидкости, газе и плазме, хаос в биологических и химических системах и т. д. [18]. Бифуркация – качественное изменение поведения динамической системы, ее перестройка, происходящая при переходе некоторого управляющего параметра μ через критическое бифуркационное значение μ_0 – точку бифуркации. В этой точке у системы появляется «выбор» из нескольких возможных моделей поведения, в котором присутствует элемент случайности. Знание основных точек бифуркаций позволяет существенно об-

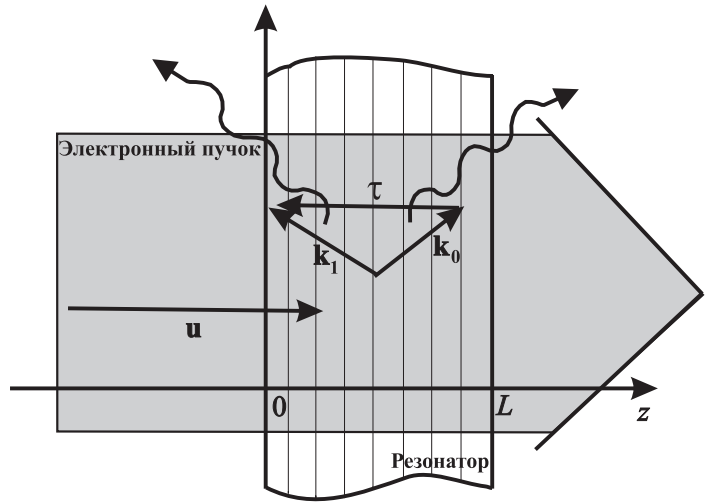


Рис. 1. Двухволновой ОЛСЭ

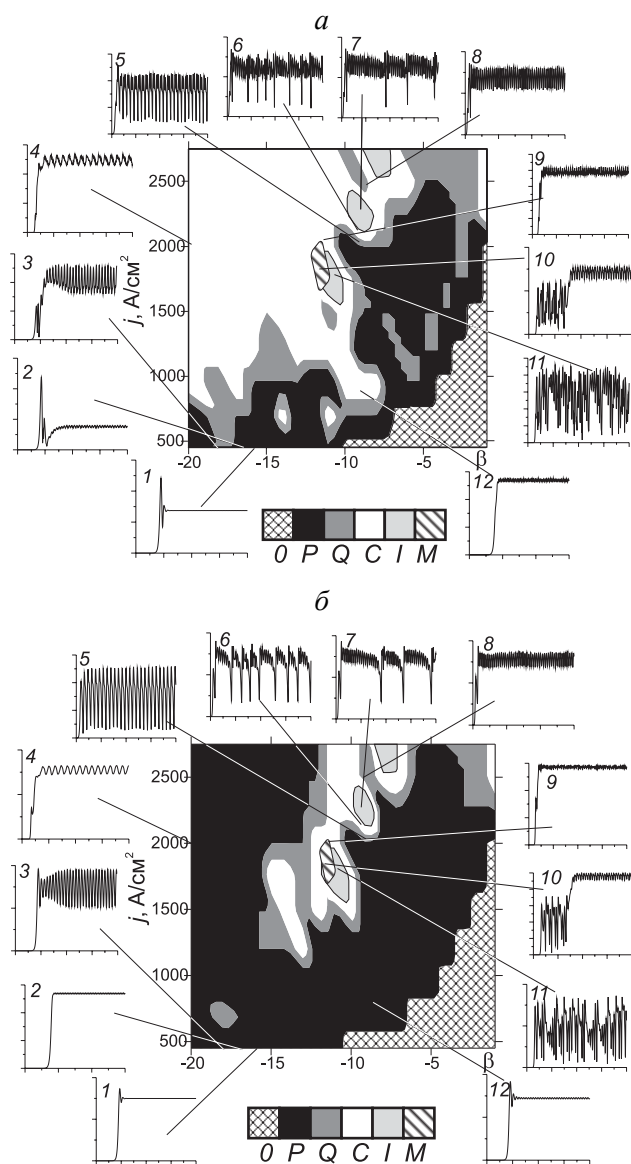


Рис. 2. Параметрическая карта перехода к хаосу в ОЛСЭ при изменении фактора асимметрии β и плотности тока пучка j для проходящей (а) и диафрагмовой (б) волн.

0 означает, что плотность тока находится ниже порога.
 P – периодические режимы, Q – квазипериодичность,
 C – хаос, I – перемежаемость, M – переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами

ной программы VOLC хаотического поведения в двухволновой системе в режиме генерации относительно плотности тока j и фактора асимметрии β . На рис. 2 изображены карты динамических режимов осцилляций двухволнового ОЛСЭ на параметрической плоскости (j, β) для следующего набора входных данных: $\lambda = 3$ см, $L = 20$ см, $j = 400 \div 3000$ А/см², $\beta = (-20) \div (-1)$, $l_0 = 1,0$, $|\chi_0| = 0,1$. Приведены наиболее характерные зависимости амплитуд электромагнитного поля $|E(L, t)|$ и $|E(0, t)|$ от времени.

Графики 1 и 2 (см. рис. 2 а) и графики 1–4, 12 (см. рис. 2 б) представляют собой периодические автоколебания. Поведение амплитуд полей 3, 5, 8, 12 (см. рис. 2 а), а также 5, 8 (см. рис. 2 б) является квазипериодическими колебаниями с несколькими несоизмеримыми частотами. Различные хаотические режимы представлены на графиках 4, 6, 9, 11 (см. рис. 2 а) и 6, 9, 11 (см. рис. 2 б), причем режимы 6 и 11 находятся рядом с полосой перемежаемости (как на графиках 7). При моделировании получены как низкоамплитудные (см. 1, 2, 4, 8, 9, 12), так и высокоамплитудные режимы (3, 5, 11). Переход между высокоамплитудными и низкоамплитудными режимами продемонстрирован на графиках 10 (ср. 11, 10 и 9). Переход может осуществляться также через перемежаемость (ср. 5–8). Та-

легчить исследование реальных систем, предсказать характер новых движений, возникающих в момент перехода системы в качественно иное состояние, оценить их устойчивость и область существования.

Изучение хаотического поведения ЛСЭ ведется достаточно активно [2, 17, 19–23], в частности, известны различные попытки параметризации нелинейных и хаотических колебаний ЛСЭ [19, 20]. В [20] было показано, что для ЛСЭ существуют следующие возможные сценарии перехода к хаосу: удвоение периода, квазипериодичность и перемежаемость. Квазипериодичность связана с бифуркациями Хопфа, которые вводят новую частоту в систему. Перемежаемость связана с бифуркациями седловых точек, т. е. столкновением устойчивой и неустойчивой точек, которые затем исчезают. Здесь после хаоса может появиться вновь регулярное движение. Работы [2] и [17] посвящены исследованию теории и нелинейной динамики всех основных типов вакуумных электронных приборов, включая ЛОВ, ЛБВ, оротроны, ЛСЭ и т. д.

Для рассматриваемой в настоящей статье модели ОЛСЭ аналитическое исследование хаоса представляется невозможным из-за ее нелинейности. Кроме того, большое количество внешних управляющих параметров, таких как ток пучка, длина системы, направляющие косинусы ОРОС, поглощение мишени, факторы асимметрии дифракции, параметры отстройки, системные параметры l_i и т. д., многократно увеличивают объем работы. Прохождение электронного пучка через пространственно-периодическую мишень в ОЛСЭ ведет к возникновению разнообразных особенностей динамики генерации, которые происходят из-за нелокальной природы взаимодействия между электронным пучком и электромагнитным полем в условиях ОРОС.

В настоящей статье ограничимся исследованием методами математического моделирования с использованием результатов работы компьютер-

кие срывы режимов могут быть объяснены тангенциальной бифуркацией с одного аттрактора на другой вследствие нелинейного механизма взаимодействия мод в системе. Обратный переход (от низкоамплитудных к высокоамплитудным) происходит последовательным увеличением амплитуды без резких срывов режимов.

Как следует из проведенного моделирования, увеличение плотности тока пучка не приводит к хаосу автоматически. Параметрическая карта представляет собой пример сложной трансформации динамических режимов с наличием областей периодичности, квазипериодичности и хаоса. ОРОС определяет сложную динамику взаимодействия электронного пучка с электромагнитными волнами, что обуславливает возникновение квазипериодической автомодуляции уже для небольших значений плотности тока.

Большее число основных частот для проходящей волны по сравнению с дифрагированной (ср. рис. 2 а и б) можно объяснить тем, что в ОЛСЭ существует возможность получить генерацию электронного пучка на нескольких частотах. В проведенном моделировании условие синхронизма было выполнено именно для проходящей волны.

При численном решении систем уравнений всегда возникает вопрос, является ли наблюдаемый «хаос» хаосом на самом деле либо он – результат некорректного учета ошибок округления или конечного порядка аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. Одним из возможных ответов на данный вопрос является исследование чувствительности решений к малым вариациям начальных данных. Если неустойчивость решений будет наблюдаться именно для хаотических режимов, а для периодических и квазипериодических решение будет устойчивым, то это явится хорошей верификацией используемых численных алгоритмов и программных средств. Аналитически проверить устойчивость и сходимость предложенных разностных методов не представляется возможным из-за сильной нелинейности полученной разностной и исходной дифференциальной систем. Проведенные исследования чувствительности полученных решений к возмущениям стартовой плотности тока пучка j для различных режимов работы ОЛСЭ дали следующие результаты. Для слабого хаоса наблюдается отстройка от невозмущенного решения при изменении значения плотности тока на $\delta j/j = 10^{-15}$ (компьютерный счет проводился с двойной точностью), хотя общая форма решения сохраняется, в то время как для периодического режима небольшие отличия в решении начинают наблюдаться при $\delta j/j = 0,01$. Это же справедливо и для квазипериодического режима. Аналогичные результаты, полностью вписывающиеся в картину периодичности и хаотичности, были получены для режима усиления ОЛСЭ при малых изменениях амплитуды падающей на систему электромагнитной волны E^0 .

Генерация излучения в ОЛСЭ зависит более чем от десяти управляющих параметров. Поэтому из-за огромной вычислительной работы обе параметрические карты грубы. Для более точного определения пределов перехода между режимами «удвоение периода – хаос», «квазипериодичность – хаос», «перемежаемость – хаос» и др. необходимо использовать большие вычислительные ресурсы. Однако численные эксперименты подтверждают, что разработанные вычислительные алгоритмы могут эффективно применяться при моделировании нелинейных режимов работы ОЛСЭ. Численные результаты согласуются с аналитическими оценками, полученными в линейном приближении. На основании проведенного анализа можно сделать вывод о возможности численно моделировать работу ОЛСЭ в будущих экспериментах.

Исследование хаотической динамики ОЛСЭ и аналогичные ему важны для определения возможного режима осцилляций при проведении экспериментов, а также при необходимости устранить автомодуляцию как паразитный эффект либо выбрать область с периодической автомодуляцией вместо хаотической.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант Ф07В-001). Автор благодарит В.Г. Барышевского за помощь в работе.

1. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М., 1987.
2. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ-электронике для физиков: в 2 т. М., 2003–2004.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // Physics Let. A. 1984. Vol. 102. P. 141.
4. Барышевский В.Г. // ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 1363.
5. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Феранчук И.Д. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. С. 92.
6. Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya. // J. Phys. D. 1991. Vol. 24. P. 1250.
7. Baryshevsky V.G. et al. // Nucl. Instr. Meth. 2002. Vol. A483. P. 21.
8. Baryshevsky V.G. et al. // Ibid. 2006. Vol. B252. P. 86.

9. Batrakov K.G., Sytova S.N. // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10. P. 1.
10. Ibid. 2006. Vol. 11. P. 13.
11. Батраков К.Г., Сытова С.Н. // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45. № 4. С. 690.
12. Batrakov K.G., Sytova S.N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2005. Vol. 8. № 1. P. 42; 2005. Vol. 8. № 4. P. 359.
13. Sytova S.N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2007. Vol. 10. P. 297.
14. Baryshevsky V.G., Gurinovich A.A. // Nucl. Instr. Meth. 2006. Vol. B252. P. 92.
15. Пинскер З.Г. Рентгеновская кристаллооптика. М., 1982.
16. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М., 1973.
17. Кузнецов С.П. // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14. С. 3.
18. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М., 1984.
19. Lee H.J., Lee J.K., Hur M.S., Yang Y. // Appl. Phys. Lett. 1998. Vol. 72. P. 936.
20. Hur M.S., Lee H.J., Lee J.K. // Phys. Rev. 1998. Vol. E58. P. 936.
21. Kim C.-B., Hong K.-S. // Nucl. Instr. Meth. B. 1998. Vol. A403. P. 161.
22. Ninno G., Fanelli D. // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 094801.
23. Thomas C.A., Botman J.I.M., Bruni C. et al. // Eur. Phys. J. D. 2005. Vol. 32. P. 83.

Поступила в редакцию 28.05.08.

Светлана Николаевна Сытова – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь НИИЯП БГУ.