НАСЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИИ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

П М. Батура, М.П. Ревотюк

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
кафедра информационных технологий автоматизированных систем
6, П.Бровки, Минск, Беларусь
телефон: + 375(17)293-86-58; e-mail: rmp@bsuir.by

Рассматривается использование эффекта снижения вычислительной сложности регулярного решения линейных задач о назначении с незначительным изменением матриц стоимостей для сокращения времени точного решения асимметричной задачи коммивояжера методом ветвей и границ.

Ключевые слова – задача коммивояжера, метод ветвей и границ, разностная схема, параллельные вычисления.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что классические линейные задачи о назначении (ЛЗН) в виде

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}\ \middle|\ \begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1;\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1;\\ x_{ij}\ge 0;\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

характеризуются вычислительной сложностью $O(n^3)$.

Достаточно часто возникает потребность пересчета задачи (1) после изменения ее исходных данных. Например, при решении асимметричной задачи коммивояжера методом ветвей и границ, когда $c_{ij}\ne c_{ji}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, а $m=n$, эффективным является порождение вариантов решения задач о назначении. Варианты отличаются лишь изменением некоторых элементов строки матрицы. Прямолинейный пересчет варианта задачи потребует $O(n^3)$ операций. Однако итерация расчета для любой включаемой строки имеет вычислительную сложность $O(n^2)$ [1,2], что побуждает использовать наследование результатов предшествующего решения.

2 АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Конкретизируем схему пересчета ЛЗН [1] при использовании метода ветвей и границ для решения точного решения асимметричных задач коммивояжера [3,4].

Наиболее эффективные для решения задачи (1) алгоритмы венгерского метода или метода кратчайшего пути приращений [2,3] используют особенности двойственной задачи

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} u_i+\sum_{j=1}^{n} v_j\ \middle|\ \begin{array}{l}c_{ij}-u_i-v_j\ge 0,\\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\end{array}\right\}, \qquad (2)$$

включая быстрый этап инициализации для формирования начального назначения строк и итерационного дополнения решения для оставшихся строк.

Однако этап инициализации можно исключить. Действительно, пусть M и N – множества строк и столбцов матрицы ЛЗН (1), а M^* и N^* – множества строк и столбцов текущего назначения, для которых в результате операции приведения выделены элементы $c_{ij}-u_i-v_j=0$, $i\in M^*$, $j\in N^*$. Если $s=|M^*|<m$ и $t=|N^*|<n$, то согласно теореме Кенига-Егервари $s+t<m$.

Определим приращение потенциалов

$h=\min\{(c_{ij}-u_i-v_j),\ i\notin M^*, j\notin N^*\}$.

На очередной итерации новые значения потенциалов $u_i^*=u_i+h\cdot(i\notin M^*)$ и $v_j^*=v_j-h\cdot(j\in N^*)$ являются допустимыми для задачи (2), так как выполняются условия:

1) если $i\in M^*$, то $u_i^*+v_j^*\le u_i+v_j\le c_{ij}$;

2) если $i\notin M^*$, $j\in N^*$, то $u_i^*+v_j^*=u_i+v_j\le c_{ij}$;

3) если $i\notin M^*$, $j\notin N^*$, то $u_i^*+v_j^*=u_i+v_j+h\le c_{ij}$.

Такое новое назначение приведет к увеличению целевой функции (2):

$$\sum_i u_i^*+\sum_j v_j^*=\sum_i u_i+(m-s)h+\sum_j v_j-th=\sum_i u_i+\sum_j v_j+h(m-s-t),$$

что позволят увеличить количество назначенных элементов матрицы, так как $s+t<m$. По индукции, последнее справедливо для любых значений $s=\overline{1,m}$, что означает отказ от этапа инициализации.

Исключение этапа инициализации применимо, как следствие, для решения комбинаторной задачи выбора вида

$$\min\left\{ \sum_{i\in M}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{i\in M} x_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \\ x_{ij} \geq 0;\ i\in M, \\ j=\overline{1,n},\ M\subset\overline{1,n} \end{array} \right\},$$

когда решение классической задачи о назначении дополнено необходимостью поиска дислокации исполнителей на множестве сочетаний индексов матрицы оценок эффективности назначения заданий [3,4].

Процесс релаксации в узле дерева вариантов связан с установкой бесконечных значений элементов матрицы ЛЗН. Очевидна возможность частичного наследования предшествующего решения. Можно заметить, что изменение элементов матрицы влечет необходимость пересмотра результата оптимизации, если только меняется позиция нулевого элемента после операции приведения. Действительно, увеличение элемента $c_{ij} \leftarrow c_{ij}^{*}$ матрицы задачи (1), когда $x_{ij}=0$, не меняет решения для любых $i\in\overline{1,m}$, $j\in\overline{1,n}$. Аналогично, уменьшение элемента $c_{ij}\leftarrow c_{ij}^{*}$, когда $x_{ij}=1$, не нарушает соотношения $c_{ij}=u_i+v_j$ в задаче (2).

В других случаях, как несложно показать, требуется повтор итераций назначения лишь для строк

$$\begin{cases} M^{*} = M^{0}\cup M^{1}, \\ M^{0} = \left\{ i \,\middle|\, (c_{ij}^{*} > c_{ij})\wedge(x_{ij}=0),\ j=\overline{1,n} \right\} \\ M^{1} = \left\{ i \,\middle|\, (c_{ij}^{*} < c_{ij})\wedge(x_{ij}=1),\ j=\overline{1,n} \right\} \end{cases} \quad (3)$$

что влечет снижение вычислительной сложности пересчета задачи (1) на величину $\left(m-\left|M^{*}\right|\right)\cdot O(n^{2})$.

Реализацию схемы (3) на уровне ветвления l дерева вариантов задачи коммивояжера предлагается проводить на векторе решения $R^{l}=\left\{ i \mid x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n} \right\}$.

Можно заметить, что если k – некоторая вершина решения задачи (2), то последовательность

$$K^{l}(k)=\left\{ K(0)=k,\ \left(K(i)=R^{l}_{K(i-1)} \,\middle|\, K(i)\neq k \right) \right\} \subseteq R^{l}$$

только тогда соответствует гамильтонову циклу, когда условием остановки является $K(n-1)=k$, $k\in\overline{1,n}$. Если цикл не гамильтонов, то есть $K^{l}(k)\subset R^{l}$, то необходимо породить множество задач уровня $l+1$. Для этого следует указать цикл минимальной длины, выбрав вершину входа в цикл

$$k^{l}=\arg\min_{k}\left\{ \left|K^{l}(k)\right|,\ k\in\overline{1,n} \right\}.$$

Правило порождения ЛЗН тривиально – для каждой вершины обнаруженного цикла необходимо запретить посещение других вершин этого цикла. Количество порождаемых ЛЗН – $\left|K^{l}\left(k^{l}\right)\right|$.

Пусть $c_{\max}=\max\limits_{i,j}\left\{ c_{ij} : i\neq j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n} \right\}$. Тогда для построчного изменения матриц порождаемых ЛЗН достаточен буфер размером $O(n)$:

$$c_{ij}^{l+1}=c_{ij}^{l}+c_{\max}\left(i\in K^{l}\left(k^{l}\right)\wedge j\in K^{l}\left(k^{l}\right) \right),\ i,j=\overline{1,n}\ . (4)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эксперименты показывают, что для случайно порождаемых по равномерному закону распределения матриц задачи (1) справедливо $\left|K^{l}\left(k^{l}\right)\right|\leq n/10$.

Таким образом, использование (3) и (4) позволяет сократить время решения задачи (1) практически на порядок.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кишкевич, А.П. Разностная схема представления состояний решения задачи коммивояжера/А.П. Кишкевич, М.П. Ревотюк//Материалы IV Респ. научной конф. молодых ученых и студентов (Брест, 28-30 ноября 2005 г.) – Брест: БГТУ, 2005. – С. 135-136.

[2] Jonker R., Volgenant A. A shortest path algorithm for dense and sparse linear assignment problem//Computing, vol. 38, 1987. – pp. 325-340.

[3] Fischetti, M. Lodi, A., Toth, P. Exact Methods for the Asymmetric Traveling Salesman Problem//Gutin, G., Punnen, A.P. The Traveling Salesman Problem and its Variations. – Kluwer, Dordrecht, 2002. pp. 169-194.

[4] Turkensteen, M., Ghosh , D., Goldengorin, B., Sierksma, G. Tolerance-based Branch and Bound algorithms for the ATSP // European Journal of Operational Research, vol. 189, 2007. – pp. 775-788.