МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

Е. И. Сукач, Д. В. Ратобыльская, В. Н. Кулага

УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
Советская 104, г. Гомель, Республика Беларусь
телефон: + 375 (0232) 604237; факс: +375 (0232) 578111; e-mail: elena.sukach@mail.ru

Рассматривается метод исследования вероятностных характеристик сложных систем, основанный на использовании стохастических алгебр, позволяющий получить вероятностное описание характеристик исследуемых систем по вероятностным характеристикам состояний их компонентов.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, стохастические матрицы, надёжность сложной системы, алгебра, неопределённость данных, неопределённость операций.

1 ВВЕДЕНИЕ

Эффективным методом, применяемым при исследовании вероятностных характеристик сложных систем, является логико-вероятностный метод. Он предназначен для исследования характеристик надёжности структурно-сложных систем, то есть таких, которые при описании не сводятся к последовательным, параллельным и древовидным структурам [1]. При этом структура системы описывается средствами математической логики, а количественная оценка ее надежности производится с помощью теории вероятностей. Известен ряд модификаций и расширений возможностей этого метода, целью которых является решение задач надёжности в различных проблемных областях.

В докладе описывается подход к исследованию вероятностных характеристик сложных систем, поведение которых определяется наличием функциональных связей между их компонентами, вероятностно изменяющими своё состояние во времени [2]. Моделирование с использованием стохастических алгебр позволяет определить вероятностные характеристики исследуемой системы по векторам вероятностей её элементарных компонентов. К особенностям подхода можно отнести: однотипное вероятностное описание компонентов системы и всей системы; рассмотрение различных операторов, определяющих отношения между компонентами системы; учёт эволюционной зависимости вероятностного изменения компонентов системы; возможность решения как прямых, так и обратных задач.

2 МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Объектом исследования являются сложные системы, имеющие множество состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1,n}$. Каждое из состояний S_j характеризуется совокупностью значений параметров исследуемой системы. Вероятности нахождения системы в каждом из состояний задаются вектором вероятностей

$$P^{sist} = (p_1^{sist}, p_2^{sist}, ..., p_n^{sist}), \sum_{j=1}^{n} p_j^{sist} = 1.$$

Значения вектора вероятностей системы P^{sist} зависят от состояний элементарных компонентов, составляющих систему и от функциональных связей между этими компонентами. Предполагается, что компоненты системы независимы и описываются однотипным образом – n-мерным вектором

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_n^i), \sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1,$$

определяющим вероятности их возможных состояний, которые также задаются множеством S.

Формализация связей между компонентами системы позволяет установить операции, задающие композиции компонентов K_i. Будем говорить, что компонент K_3 является композицией компонентов K_1 и K_2, $K_3 = K_1 * K_2$, если задано отображение, однозначно определяющее состояние S_k компонента K_3 по состояниям S_i и S_j исходных компонентов K_1 и K_2, где k определяется вектором вероятностей $a_{ijk} = (a_{ij1}, a_{ij2}, ..., a_{ijn})$, таким что

$$\forall i,j,k \quad a_{ijk} \ge 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} = 1. \qquad (1)$$

При этом элементы вектора P^3 вычисляются по формуле:

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} p_i^1 p_j^2 \text{ ,где } i,j,k = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Или более кратко:

$$P^3 = P^1 * P^2 \qquad (3)$$

Для введённой операции справедливы законы дистрибутивности:

$$P^1 * (\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) = \alpha \cdot P^1 * P^2 + \beta \cdot P^1 * P^3,$$
$$(\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P^3) * P^1 = \alpha \cdot P^2 * P^1 + \beta \cdot P^3 * P^1, \qquad (4)$$

где $P^1, P^2, P^3 \in R^n$, а α и β - вещественные числа.

Таким образом умножение * элементов векторного пространства порождает алгебру А*.

Алгебра задаётся структурными коэффициентами a_{ijk}, удовлетворяющими условию (1). Будем называть такую алгебру стохастической, поскольку элементами её представления являются стохастические матрицы.

Процесс формирования вектора вероятностей состояний системы по векторам вероятностей состояний составляющих систему компонентов с учётом введённых операций назовём вероятностно-алгебраическим методом моделирования. Моделирование реализуется путём последовательной свёртки векторов вероятностей компонентов с учётом структурных коэффициентов стохастических алгебр, порождённых операциями, задающими композиции компонентов исследуемой системы.

3 СВОЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Частным случаем стохастической алгебры является алгебра А*, порождённая детерминированной операцией *. Такая операция задаётся функцией $F(i,j)$, а структурные коэффициенты алгебры определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ijk} = 1, & если \quad k = F(i,j) \\ a_{ijk} = 0, & если \quad k \neq F(i,j) \end{cases}. \qquad (5)$$

Алгебра, порождённая детерминированной операцией, имеет следующие свойства.

Свойство 1. Если функция F коммутативна, то алгебра А* является коммутативной, то есть для любых двух элементов P^1 и P^2 выполняется $P^1 * P^2 = P^2 * P^1$.

Свойство 2. Если функция F ассоциативна, то алгебра А* является ассоциативной, то есть для любых трёх элементов P^1, P^2 и P^3 выполняется $P^1 * (P^2 * P^3) = (P^1 * P^2) * P^3$.

Свойство 3. Если компоненты векторов P^1 и P^2 являются положительными и нормированными, то и вектор $P^3 = P^1 * P^2$ также обладает этими свойствами, то есть:

$$\forall k = \overline{1,n} \quad p_k^3 \geq 0 \quad и \quad \sum_{k=1}^{n} p_k^3 = 1. \qquad (6)$$

Свойство 4. Если состояния исходных элементарных компонентов системы являются детерминированными, то и состояние всей системы является детерминированным.

Детерминированные состояния компонентов описываются векторами вида $\sigma^1 = (1,0,\ldots,0)$, $\sigma^2 = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\sigma^n = (0,0,\ldots,1)$. Эти векторы являются базисными элементами алгебры. В случае стохастической алгебры, порожденной детерминированной операцией, произведение базисных векторов есть базисный вектор, то есть $\sigma^i * \sigma^j = \sigma^k$, где $k = F(i,j)$.

В общем случае структурные коэффициенты стохастической алгебры являются произвольными положительными величинами, удовлетворяющими условию (1). При этом умножению базисных векторов будет соответствовать некоторый вектор $P^k \in R^n$, то есть $\sigma^i * \sigma^j = P^k$.

На практике это соответствует случаю, когда детерминированные состояния элементарных компонентов приводят к недетерминированному состоянию системы. При этом структурные коэффициенты алгебры определяют вероятности перехода системы в каждое из состояний в зависимости от состояний исходных компонентов и задаются на основе экспериментальных данных.

Общим свойством стохастических алгебр является их связь с цепями Маркова, позволяющая сделать выводы об изменении состояний исследуемых систем с учётом введенных операций и свойств этих операций.

Пусть вектора P^1 и P^2 определяют вероятности состояний компонентов K_1 и K_2 соответственно, а вектор P^3 определяет вероятности состояний системы, включающей компоненты K_1 и K_2, взаимодействующие в соответствии с операцией *, порождающей стохастическую алгебру А*. Тогда, умножение структурных коэффициентов стохастической алгебры a_{ijk} на компоненты вектора P^1 даёт матрицу $M_1 = \|m_{jk}\|$, где $m_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ijk} p_i^1$, умножение a_{ijk} на компоненты вектора P^2 даёт матрицу $M_2 = \|m_{ik}\|$, где $m_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} p_j^2$, а умножение a_{ijk} на компоненты вектора P^3 даёт матрицу $M_3 = \|m_{ij}\|$, где $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} p_k^3$.

Очевидно, эти матрицы будут стохастическими, описывающими некоторый случайный процесс, который представляется цепью Маркова. Вид их будет определяться операцией, порождающей алгебру.

Свойство 5. Для ассоциативной алгебры А*, порождённой операцией *, и любых векторов P^1, P^2, P^3, которым соответствуют стохастические матрицы M_1, M_2 и M_3, где $P^3 = P^1 * P^2$ выполняется равенство $M_3 = M_1 \cdot M_2$, причём M_3 является стохастической матрицей такой же структуры, что и матрицы M_1 и M_2.

4 ПРИМЕРЫ ОПЕРАЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ СТОХАСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

Состав операций, задающих композицию компонентов исследуемой системы, определяется с учётом особенностей исследуемой системы. Метод моделирования допускает использование детерминированных и недетерминированных операций, а также бинарных и n-арных операций [3].

Детерминированные операции задаются функциями $F(i, j)$, примерами которых могут быть следующие:

- $\max(i, j)$ (для операции $\wedge$);
- $\min(i, j)$ (для операции $\vee$);
- $\min(i + j - 1, n)$ (для операции $\oplus$);
- $|i - j|$ (для операции Θ).

При этом операции конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$) имеют естественную интерпретацию при решении задач надёжности сложных систем. Операция $\wedge$ описывает связь между последовательно соединёнными компонентами, а операция $\vee$ – связь между параллельно соединёнными компонентами.

Функция $F(i, j) = \max(i, j)$ задаёт операцию $\wedge$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\wedge$. Отказ системы, представленной композицией компонентов $K_1 \wedge K_2$, определяется отказом одного из них и её состояние определяется состоянием наименее надёжного компонента. Вектор $\sigma^n = (0,0,...,1)$ (компонент находится в состоянии n, то есть произошёл отказ) является нулём алгебры $A\wedge$, так как $\sigma^n \wedge P^j = \sigma^n$ для любого P^j. Вектор $\sigma^1 = (1,0,...,0)$ (компонент находится в состоянии 1, то есть полностью исправен) является единицей алгебры $A\wedge$, поскольку $\sigma^1 \wedge P^j = P^j$ для любого P^j.

Функция $F(i, j) = \min(i, j)$ задаёт операцию $\vee$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\vee$. В этом случае отказ системы, представленной композицией компонентов $K_1 \vee K_2$, происходит в результате отказа двух компонентов и её состояние определяется состоянием наиболее надёжного компонента. Для этой алгебры единицей является вектор $\sigma^n = (0,0,...,1)$, а нулём $\sigma^1 = (1,0,...,0)$.

Функция $F(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ задаёт операцию $\oplus$ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\oplus$. При этом состояние системы определяется путём суммирования состояний исходных компонентов. В задачах исследования надёжности сложных систем эта операция может быть использована для оценки некоторого уровня накопления повреждений взаимодействующих компонентов, а в задачах исследования вероятностных характеристик развивающейся системы – для оценки уровня завершённости формирования качественных характеристик системы.

Функция $F(i, j) = |i - j|$ задаёт операцию Θ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\Theta$. Состояние системы определяется разностью состояний исходных компонентов. При решении задач надёжности она позволяет учесть разницу между состояниями работоспособности компонентов исследуемой системы.

В силу введённых операций, алгебры $A\wedge$ и $A\vee$ являются коммутативными и ассоциативными. Алгебра $A\oplus$ является коммутативной, но не является ассоциативной поскольку функция $F(i, j) = \min(i + j - 1, n)$, определяющая структурные коэффициенты алгебры, коммутативна, но не ассоциативна.

При решении практических задач часто встречаются ситуации, когда уместно использование операции, описывающей композицию n компонентов и порождающей n-арную алгебру. Например, в случае необходимости учёта вероятностных характеристик трех компонентов системы формируются структурные коэффициенты алгебры a_{ijm}^k, а элементы результирующего вектора вероятностей вычисляются по формуле:

$$p_k^4 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{ijm}^k p_i^1 p_j^2 p_m^3 \qquad \forall i, j, l, m, k \tag{7}$$

5 ПРИМЕРЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

Для каждой из стохастических алгебр, порождённых описанными операциями, существуют представления, элементами которых являются стохастические матрицы, имеющие свои особенности.

Так, например, стохастические матрицы, полученные для стохастической алгебры $A\wedge$ имеют вид верхней треугольной матрицы, компоненты которой структурно связаны с вектором вероятностей состояний исходного компонента $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & p_1+p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & 0 & p_1+p_2+p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Для алгебры $A\oplus$ стохастические матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1}+p_n \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2}+p_{n-1}+p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

В том случае, если стохастическая алгебра является ассоциативной, для которой выполняется свойство 5, метод моделирования позволяет решать не только прямые задачи, связанные с определением динамически изменяющихся векторов вероятностей состояний системы по векторам вероятностей состояний исходных компонентов системы, но и обратные задачи. А именно, по имеющимся векторам P^1 (вектору вероятностей состояний компонента системы) и P^{sist} (вектору вероятностей состояний системы) определить вектор вероятностей состояний второго компонента P^2, составляющего систему.

6 ВЫВОДЫ

Предложенный метод моделирования оперирует вероятностными состояниями компонентов. Для композиции компонентов используются произвольные функции: детерминированные/вероятностные, бинарные/n-арные, позволяющие отразить семантику исследуемых систем. Метод имеет алгебраическую основу, позволяющую единым образом описать связи между компонентами и использовать общие свойства стохастических алгебр при исследовании функционально-сложных систем из различных предметных областей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем/ И.А. Рябинин // СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2007. –276 с.

[2] Сукач, Е.И. Использование логического моделирования для исследования сложных систем /Е.И. Сукач // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2004.- №4(25). – С. 60 –64.

[3] Сукач, Е.И. Расширение метода логико-вероятностного моделирования сложных систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Н. Кулага // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: труды Международной научной школы МА БР -2009, 7-11 июля, 2009 г.- Санкт-Петербург: ГУАП-2009.- С. 471-476.