

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

This paper deals with problem of effect of concentrated force in unlimited saturated porous space. The problem is solved on the basis of the equations of elastic deformation of saturated porous medium and gas filtration.

Для описания процессов деформирования пород используется ряд моделей насыщенных пористых сред. Широкое применение получили подходы [1–3], позволяющие исследовать напряженно-деформированное состояние на основе связанных уравнений упругого деформирования насыщенной пористой среды и фильтрации жидкости или газа. Коэффициенты уравнений определяются из эксперимента.

В работе [4] вопросы о замыкании основных уравнений механики насыщенных сред связываются с задачей об эффективных свойствах и напряженно-деформированном состоянии двухкомпонентной среды случайной структуры. Предложенный подход позволяет определить коэффициенты уравнений через механические свойства и объемные концентрации фаз.

Связанные процессы деформирования газонасыщенной пористой среды и фильтрации газа в линейной постановке могут быть описаны уравнениями [4]:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \beta P_{,i}, \quad (1)$$

$$P_{,jj} - \frac{a_1}{c_2 k} \dot{P} - \frac{a_2}{c_1 k} \dot{u}_{j,j} = Y_j, \quad (2)$$

где u_i – макроперемещения системы «скелет – газ», Y_i – объемная сила, действующая на газ, c_2 – объемная концентрация пор, k – коэффициент фильтрации газа, $\lambda, \mu, \beta, a_1, a_2$ – эффективные постоянные системы «скелет – газ», которые определяются формулами:

$$\lambda = \frac{4c_1^2 K_1 \mu}{3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1} - \frac{2}{3} \mu; \quad \mu = \frac{c_1^2 \mu_1 [9(c_1 K_1 + c_2 K_2) + 8c_1 \mu_1]}{3(2 + c_1)(c_1 K_1 + c_2 K_2) + 4(2 + c_2)c_1 \mu_1}, \quad \beta = \frac{c_2(3K_1 + 4c_1 \mu_1)}{3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1},$$

$$a_1 = \frac{3(c_1 K_2 + c_2 K_1) + 4c_1 \mu_1}{K_2(3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1)}; \quad a_2 = \frac{3K_1 + 4c_1 \mu_1}{3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1}; \quad (c_1 + c_2 = 1).$$

Здесь K_1, μ_1 – модули объемного сжатия и сдвига твердой фазы, K_2 – модуль объемного сжатия газа.

К системе уравнений (1) – (2) следует добавить граничные и начальные условия.

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы в неограниченном пространстве, помещенной в начале координат. Действие этой силы вызывает поле перемещений u_i и связанное с ним поле деформаций.

Будем разыскивать частное решение системы (1) в виде [5]:

$$\mathbf{u} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \Psi, \quad (3)$$

где Φ, Ψ – некоторые скалярная и векторная функции.

Точно так же поступим с полем массовых сил, разлагая его на потенциальную и соленоидальную части:

$$\mathbf{X} = \rho(\text{grad} \varphi + \text{rot} \Omega), \quad (4)$$

где ρ – плотность твердой фазы.

Функции φ, Ω выразим через распределение массовых сил $\mathbf{X}$. Из соотношения (4) имеем

$$\text{div} \mathbf{X} = \rho \Delta \varphi, \quad \text{rot} \mathbf{X} = -\rho \Delta \Omega.$$

Для определения функций Φ, Ω теперь имеются уравнения:

$$\rho \Delta \Phi = X_{i,i}, \quad \rho \Delta \Omega_i = -\varepsilon_{ijk} X_{k,j}, \quad (5)$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивиты (альтернирующий тензор) [6].

Подстановка соотношений (3) и (4) в уравнения (1) и (2) в предположении, что $\mathbf{Y} = 0$ (пренебрегаем объемными силами, действующими на газ), приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = mP - \frac{1}{n_1^2} \Phi, \\ \Delta \Psi = -\frac{1}{n_2^2} \Omega, \\ \Delta P - \frac{a_1}{c_2 k} \dot{P} - \frac{a_2}{c_1 k} \Delta \dot{\Phi} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } m = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}, \quad n_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad n_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Предположим, что в направлении оси x_1 в начале координат действует сосредоточенная сила, медленно изменяющаяся со временем. Тогда

$$X_j = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta_{1j} f(t), \quad (7)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера.

Применим к уравнениям (3), (5), (6) преобразование Лапласа, определенное соотношением

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, s) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}, t) e^{-st} dt,$$

и предположим, что начальные условия однородны.

Получим систему уравнений:

$$\rho \Delta \tilde{\Omega}_i = -\varepsilon_{ijk} \tilde{X}_{k,j}, \quad \rho \Delta \tilde{\Phi} = \tilde{X}_{i,i}, \quad (8)$$

$$\Delta \tilde{\Phi} = m \tilde{P} - \frac{1}{n_1^2} \tilde{\Phi}, \quad \Delta \tilde{\Psi} = -\frac{1}{n_2^2} \tilde{\Omega}, \quad (9)$$

$$\Delta \tilde{P} - \frac{a_1}{c_2 k} \tilde{P} - \frac{a_2}{c_1 k} \Delta \tilde{\Phi} = 0. \quad (10)$$

Решения уравнений Пуассона (8) известны и имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, s) &= -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V X_i(\xi, s) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R(\mathbf{x}, \xi)} \right] dV(\xi), \\ \tilde{\Omega}(\mathbf{x}, s) &= -\frac{1}{4\pi\rho} \int_V \varepsilon_{ijk} X_i(\xi, s) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{R(\mathbf{x}, \xi)} \right] dV(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя формулу (7) в (11), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, s) &= -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s), \quad \tilde{\Omega}_1 = 0, \quad \tilde{\Omega}_2(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s), \quad \tilde{\Omega}_3(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s), \\ R^2 &= x_i x_i. \end{aligned}$$

Исключая функцию $\tilde{\Phi}$ из уравнений (9) и (10), будем иметь

$$(\Delta - \gamma^2) \tilde{P} = \frac{s a_1}{4\pi\rho c_2 k n_1^2 m} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s), \quad \text{где } \gamma^2 = \frac{s a}{k c_2} (1 + \alpha), \quad \alpha = \frac{a_2 c_2 m}{a_1 c_1}.$$

Частным решением этого уравнения является функция

$$\tilde{P} = \alpha D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e^{-\gamma R}}{R} - \frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s), \quad D = \frac{1}{4\pi\rho n_1^2 m (1 + \alpha)}. \quad (12)$$

Подставляя формулу (12) в первое уравнение системы (9), приходим к уравнению

$$\Delta \tilde{\Phi} = Dm \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \frac{e^{-\gamma R}}{R} - \frac{1}{R} \right) \tilde{f}(s),$$

его частное решение имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, s) = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ R + \frac{2\alpha c_2 k}{s(1+\alpha)a_1 R} \exp \left[-R \sqrt{\frac{(1+\alpha)a_1 s}{c_2 k}} \right] \right\} \tilde{f}(s). \quad (13)$$

Решение уравнения $\Delta \tilde{\Psi} = -\frac{1}{n_2^2} \tilde{\Omega}$ известно:

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial R}{\partial x_3} f(t), \quad \Psi_3 = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial R}{\partial x_2} f(t).$$

Выполнив в формулах (12), (13) обратное преобразование Лапласа и подставив Φ, Ψ в соотношение (3), получим

$$u_j^{(1)} = \left[\left(\frac{mD}{2} - \frac{1}{8\pi\mu} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_j} + \frac{\delta_{1j}}{8\pi\mu R} \right] f(t) + \\ + \frac{\alpha c_2 k m D}{a_1 (1+\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \int_0^t \frac{f(\tau)}{R} \operatorname{erfc} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{(1+\alpha)a_1}{c_2 k(t-\tau)} \right)^{1/2} \right] d\tau, \\ \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du.$$

Давление $P^{(1)}$ задается формулой

$$P^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\alpha D \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{f(t)}{R} - \int_0^t f(\tau) \left[\frac{(1+\alpha)a_1}{4\pi k c_2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{R^2 (1+\alpha)a_1}{4\pi c_2 k(t-\tau)} \right] d\tau \right\}.$$

Если теперь предположить, что в точке ξ действует сосредоточенная сила $X_j = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta_{ik}f(t)$, направленная по оси x_k , то получим основное решение:

$$u_j^{(k)} = \left[\left(\frac{mD}{2} - \frac{1}{8\pi\mu} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\delta_{jk}}{8\pi\mu R} \right] f(t) + \\ + \frac{\alpha c_2 k m D}{a_1 (1+\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_0^t \frac{f(\tau)}{R} \operatorname{erfc} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{(1+\alpha)a_1}{c_2 k(t-\tau)} \right)^{1/2} \right] d\tau, \\ P^{(k)} = -\alpha D \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{f(t)}{R} - \int_0^t f(\tau) \left[\frac{(1+\alpha)a_1}{4\pi k c_2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{R^2 (1+\alpha)a_1}{4\pi c_2 k(t-\tau)} \right] d\tau \right\}.$$

Перемещение $u_j^{(k)}$ складывается из двух членов: первого, который изменяется со временем как функция $f(t)$, и второго в виде свертки, характеризующего связность поля деформаций и поля давления.

С помощью полученных здесь формул можно построить тензор Грина [5], который, в свою очередь, может быть использован [7] для решения задач о напряженно-деформированном состоянии насыщенной пористой среды с полостями и трещинами.

1. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М., 1984.
2. Biot M. A. // J. Appl. Phys. 1955. № 2. С. 182.
3. Rice J. R. // Reviews of Geophysics and Space Physics. 1956. № 27. С. 240.
4. Хорошун Л. П. // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 12. С. 35.
5. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
6. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М., 1974.
7. Бреббия К., Телес Ж., Вробел Г. Методы граничных элементов. М., 1987.

Поступила в редакцию 18.12.08.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.