УДК 004.925.8

А.П. ПОБЕГАЙЛО

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРИВЫХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Polynomials for approximating the jump function are defined. It is shown how these polynomials can be used for deformation of curves. Then applications of the introduced polynomials to construction of interpolating spline curves are considered.

В данной работе рассмотрен подход к сглаживанию кривых и построению сплайн-кривых в линейных пространствах с использованием деформации кривых, которая выполняется при помощи специального класса полиномов, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Выполнение этих граничных условий обеспечивает нужную степень непрерывности сплайн-кривой. Изложение материала базируется на статьях [1, 2]. Отличие заключается в том, что в этой работе представлены аналитические выражения для вычисления коэффициентов полиномов, используемых для деформации кривых. В упомянутых статьях коэффициенты этих полиномов находились посредством решения системы линейных уравнений. Использование аналитических выражений позволяет доказать важные свойства этих полиномов в общем случае.

Аппроксимация ступенчатой функции

Определим класс полиномов, которые аппроксимируют ступенчатую функцию

$$\delta^+(u)=\begin{cases}0, & 0\le u<1/2,\\ 1/2, & u=1/2,\\ 1, & 1/2<u\le 1.\end{cases}$$

Очевидно, что ступенчатая функция $\delta^+(u)$ является бесконечно гладкой на границах интервала $[0,1]$ и имеет разрыв в его середине. Чтобы избежать разрыва, аппроксимируем эту функцию полиномами. Для этого введем следующие последовательности узловых точек:

$$(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k+1},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k+1})$$

для любых $k\in N$. Тогда с использованием полиномов Бернштейна

$$b_{n,m}(u)=C_n^m(1-u)^{n-m}u^m$$

ступенчатая функция $\delta^+(u)$ может быть аппроксимирована следующими полиномами:

$$w_k(u)=0\cdot b_{2k+1,0}(u)+\cdots+0\cdot b_{2k+1,k}+1\cdot b_{2k+1,k+1}(u)+\cdots+1\cdot b_{2k+1,2k+1}(u).$$

Удаляя нулевые слагаемые из приведенных формул, получим следующие выражения для аппроксимирующих полиномов:

$$w_k(u)=\sum_{i=k+1}^{2k+1}b_{2k+1,i}(u),$$

где $u\in[0,1]$. Назовем полиномы $w_k(u)$ полиномами, сглаживающими скачок.

Из этого определения следует, что полиномы, сглаживающие ступенчатую функцию, удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$w_k(0)=0,\ w_k(1)=1,\ w_k^{(l)}(0)=w_k^{(l)}(1)=0$$

для всех $l\in\{1,\ldots,k\}$. Кроме того, эти полиномы обладают некоторыми свойствами.

Свойство 1. Для любых $k\in N$ справедливо равенство

$$w_k(u)+w_k(1-u)=1$$

для любых значений $u\in[0,1]$.

Доказательство. Это свойство следует из следующего свойства полиномов Бернштейна

$$\sum_{m=0}^{n}b_{n,m}(u)=1.$$

Свойство 2. Для любых $k\in N$ полиномы $w_k(u)$ симметричны относительно точки $u=1/2$.

Доказательство. Из свойства 1 следует, что

$$w_k(1/2+v)+w_k(1/2-v)=1$$

для любого значения $v \in [-1/2, 1/2]$, что и означает симметричность полиномов $w_k(u)$ относительно точки $u = 1/2$.

Свойство 3.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{1/2} w_k(u)du = 0.$$

Доказательство. Очевидно, что полиномы $w_k(u)$ могут быть представлены в степенном базисе u^{k+1}, u^{k+2}, …, u^{2k+1}. Следовательно, неопределенный интеграл от полинома $w_k(u)$ будет полиномом в степенном базисе u^{k+2}, u^{k+3},…, u^{2k+2}. Отсюда и следует данное свойство.

Из свойств 2 и 3 вытекает, что при повышении степени полином $w_k(u)$ неограниченно близко приближается к ступенчатой функции $\delta^+(u)$. Рис. 1 иллюстрирует поведение полиномов $w_k(u)$.

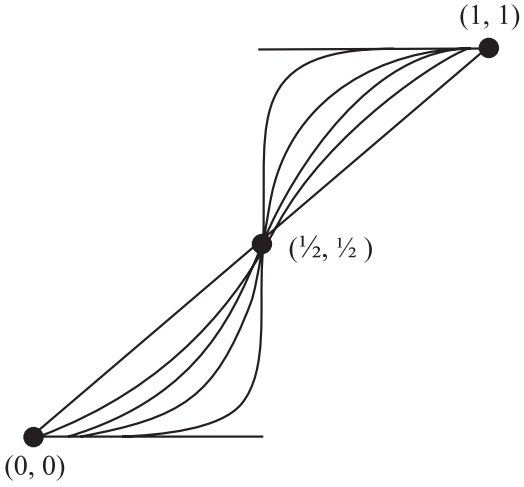

Рис. 1. Полиномы, сглаживающие ступенчатую функцию

Свойство 4. Для любого значения $k \in N$ полином $w_k(u)$ является минимумом функционала

$$J_{k+1}(f) = \int_0^1 | f^{(k+1)}(u) |^2 \, du,$$

где функция $f(u)$, $u \in [0,1]$, удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$f(0) = 0, \;\; f(1) = 1, \;\; f^{(l)}(0) = f^{(l)}(1) = 0$$

для любого $l \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Доказательство. Пусть функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_{k+1}(f)$. Рассмотрим функцию

$$(g - w_k)(u) = g(u) - w_k(u).$$

Тогда

$$| (g - w_k)^{(k+1)} |^2 = | g^{(k+1)} - w_k^{(k+1)} |^2 = (g^{(k+1)})^2 - 2g^{(k+1)}w_k^{(k+1)} + (w_k^{(k+1)})^2 =$$
$$= (g^{(k+1)})^2 - (w_k^{(k+1)})^2 - 2(g^{(k+1)} - w_k^{(k+1)})w_k^{(k+1)}.$$

Из полученного уравнения следует, что

$$J_{k+1}(g - w_k) = J_{k+1}(g) - J_{k+1}(w_k) - 2\int_0^1 (g^{(k+1)}(u) - w_k^{(k+1)}(u))w_k^{(k+1)}(u)du.$$

Последний интеграл может быть вычислен по частям:

$$\int_0^1 (g^{(k+1)}(u) - w_k^{(k+1)}(u))w_k^{(k+1)}(u)du = \int_0^1 w_k^{(k+1)}(u)d(g^{(k)}(u) - w_k^{(k)}(u)) =$$

$$= (w_k^{(k+1)}(u)(g^{(k)}(u) - w_k^{(k)}(u)))\Big|_0^1 - \int_0^1 (g^{(k)}(u) - w_k^{(k)}(u))w_k^{(k+2)}(u)du = -\int_0^1 (g^{(k)}(u) - w_k^{(k)}(u))w_k^{(k+2)}(u)du$$

с учетом того, что

$$g^{(k)}(0) = w_k^{(k)}(0) = 0, \;\; g^{(k)}(1) = w_k^{(k)}(1) = 0.$$

Применяя эту рекуррентную формулу для последовательного интегрирования по частям и имея в виду, что функция $w_k^{(2k+1)}(u)$ является константой, получим

$$\int_0^1 (g^{(k+1)}(u) - w_k^{(k+1)}(u))w_k^{(k+1)}(u)du = (-1)^k \int_0^1 (g'(u) - w'_{k-1}(u))w_{k+1}^{(2k+1)}(u)du =$$
$$= (-1)^k ((g(u) - w_{k-1}(u))w_k^{(2k+1)}(u))\Big|_0^1 = 0,$$

так как

$$g(0) = w_k(0) = 0, \;\; g(1) = w_k(1) = 1.$$

Таким образом, доказано, что

$$J_{k+1}(g - w_k) = J_{k+1}(g) - J_{k+1}(w_k).$$

Последнее равенство может быть записано следующим образом:

$$J_{k+1}(g) = J_{k+1}(w_k) + J_{k+1}(g - w_k).$$

Из определения функционала $J_{k+1}(f)$ следует, что

$$J_{k+1}(g - w_k) \geq 0.$$

Значит, выполняется неравенство

$$J_{k+1}(w_k) \leq J_{k+1}(g).$$

Но функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_{k+1}(f)$ по предположению, следовательно,

$$g(u) = w_k(u).$$

Таким образом, доказано, что полином $w_k(u)$ является минимумом функционала $J_{k+1}(f)$.

Теперь докажем, что этот минимум единственный. Предположим противное, что существует такая функция $g(u)$, которая удовлетворяет условию

$$J_{k+1}(g) = J_{k+1}(w_k).$$

Из этого уравнения следует, что

$$J_{k+1}(g - w_k) = 0,$$

или, другими словами,

$$g^{(k+1)}(u) = w_k^{(k+1)}(u)$$

для всех $u \in [0, 1]$. Следовательно,

$$g(u) = w_k(u) + \sum_{i=0}^{k} a_i u^i.$$

Но коэффициенты a_i для всех $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ равны нулю, учитывая граничные условия, которым должна удовлетворять функция $g(u)$. Значит,

$$g(u) = w_k(u),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 4 полиномов $w_k(u)$ не является неожиданным, так как аналогичным свойством обладают кубические сплайны [3, 4].

Деформация кривых в линейном пространстве

Покажем, как при помощи полиномов $w_k(u)$ могут быть построены интерполирующие сплайн-кривые. Для этого рассмотрим в линейном пространстве произвольные гладкие параметризованные кривые $\mathbf{p}_1(u)$ и $\mathbf{p}_2(u)$, $u \in [0, 1]$, которые имеют общие концевые точки, т. е.

$$\mathbf{p}_1(0) = \mathbf{p}_2(0), \ \mathbf{p}_1(1) = \mathbf{p}_2(1).$$

Проблема заключается в следующем. Нужно построить параметризованную кривую $\mathbf{p}(u)$, $u \in [0, 1]$, которая удовлетворяет граничным условиям:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_1(0), \ \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_2(1)$$

и

$$\mathbf{p}^{(l)}(0) = \mathbf{p}_1^{(l)}(0), \ \mathbf{p}^{(l)}(1) = \mathbf{p}_2^{(l)}(1)$$

для всех $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, где $k \in N$. Параметризованную кривую $\mathbf{p}(u)$ будем называть деформацией параметризованной кривой $\mathbf{p}_1(u)$ в параметризованную кривую $\mathbf{p}_2(u)$ со степенью непрерывности k.

Определим параметризованную кривую $\mathbf{p}(u)$:

$$\mathbf{p}(u) = (1 - w_{k-1}(u))\mathbf{p}_1(u) + w_{k-1}(u)\mathbf{p}_2(u),$$

где $u \in [0, 1]$. Покажем, что заданная таким образом параметризованная кривая удовлетворяет нужным граничным условиям.

Из определения полиномов $w_k(u)$ вытекает, что

$$\mathbf{p}(0) = (1 - w_{k-1}(0))\mathbf{p}_1(0) + w_{k-1}(0)\mathbf{p}_2(0) = \mathbf{p}_1(0)$$

и

$$\mathbf{p}(1) = (1 - w_{k-1}(1))\mathbf{p}_1(1) + w_{k-1}(1)\mathbf{p}_2(1) = \mathbf{p}_2(1).$$

Условия на совпадение граничных точек выполняются.

Производные параметризованной кривой $\mathbf{p}(u)$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{p}^{(l)}(u) = \sum_{i=1}^{l} C_l^i ((1 - w_{k-1}(u))^{(l-i)} (\mathbf{p}_1(u))^{(i)} + (w_{k-1}(u))^{(l-i)} (\mathbf{p}_2(u))^{(i)})$$

для любого $l \in N$. С учетом свойства 1 полиномов $w_k(u)$ это уравнение может быть переписано:

$$\mathbf{p}^{(l)}(u) = \sum_{i=1}^{l} C_l^i ((w_{k-1}(1-u))^{(l-i)} (\mathbf{p}_1(u))^{(i)} + (w_{k-1}(u))^{(l-i)} (\mathbf{p}_2(u))^{(i)}).$$

Отсюда и из определения полиномов $w_k(u)$ следует, что производные кривой $\mathbf{p}(u)$ удовлетворяют требуемым условиям в граничных точках.

Построение сплайн-кривых в линейном пространстве

Покажем, как можно использовать полиномы $w_k(u)$ для построения интерполирующих сплайн-кривых. Для этого рассмотрим четыре последовательные узловые точки $\mathbf{p}_{i-1}$, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i+1}$, $\mathbf{p}_{i+2}$, через которые должна проходить сплайн-кривая. Выберем две гладкие кривые $\mathbf{p}_1(u)$ и $\mathbf{p}_2(u)$, где $u \in [0, 1]$, первая из которых проходит через точки $\mathbf{p}_{i-1}$, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i+1}$, а вторая – через точки $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i+1}$, $\mathbf{p}_{i+2}$. В общем случае выбор кривых обусловлен требованиями решаемой задачи. Тогда сегмент сплайн-кривой между узловыми точками $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_{i+1}$ может быть задан как

$$\mathbf{p}(u) = (1 - w_{k-1}(u))\mathbf{p}_1(u) + w_{k-1}(u)\mathbf{p}_2(u).$$

Графическое пояснение предложенного способа построения сегмента сплайн-кривой приведено на рис. 2. Из полученных в предыдущем разделе результатов следует, что построенная таким образом сплайн-кривая имеет степень непрерывности *k*.

В простейшем случае для обеспечения в узловых точках непрерывности первой производной сегмент сплайн-кривой определяется при помощи полиномов w_0 следующим образом:

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)\mathbf{p}_1(u) + u\mathbf{p}_2(u).$$

Производная от этой кривой имеет вид

$$\mathbf{p}'(u) = -\mathbf{p}_1(u) + (1-u)\mathbf{p}_1'(u) + \mathbf{p}_2(u) + u\mathbf{p}_2'.$$

Из этого уравнения видно, что в общем случае полиномы w_{k-1} обеспечивают непрерывность *k*-й производной сплайн-кривой в узловых точках из-за совпадения концевых точек параметризованных кривых $\mathbf{p}_1(u)$ и $\mathbf{p}_2(u)$, определяющих сегмент сплайна.

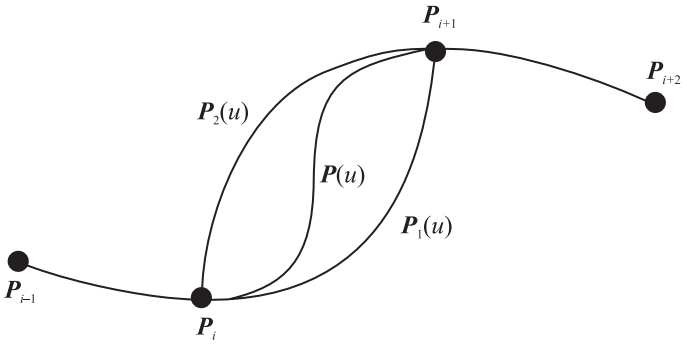

Рис. 2. Построение сегмента сплайн-кривой

Если в качестве параметризованных кривых $\mathbf{p}_1(u)$ и $\mathbf{p}_2(u)$, используемых при построении сплайна с непрерывной первой производной, выбраны дуги окружностей, то получаем известный способ построения сплайн-кривых при помощи деформации дуг окружностей, который изложен в [5]. Более подробно об этом речь идет в [1].

Таким образом, представлены полиномы, сглаживающие с заданной степенью непрерывности ступенчатую функцию. Доказаны свойства этих полиномов. Показано, как можно применять эти полиномы для построения интерполирующих сплайн-кривых и сглаживания углов, получаемых при стыковке сегментных произвольных кривых.

1. Pobegailo A.P. // Computer-Aided Design. 1991. Vol. 23. № 8. P. 579.

2. Pobegailo A.P. // Ibid. 1996. Vol. 28. № 12. P. 973.

3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., 1972.

4. Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск, 1988.

5. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М., 1985.

Поступила в редакцию 18.12.08.

Александр Павлович Побегайло – кандидат технических наук, доцент кафедры технологии программирования.