

УДК 515.12

В.Л. ТИМОХОВИЧ, Д.С. ФРОЛОВА

О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

The subject of the study is different topologies on the set of continuous maps $C(X, Y)$, especially the exponential topology $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$, the topologies of uniform convergence $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ and the topology $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ determined as the supremum of all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$.

The following results 1–3 are the main. Space Y with some natural ancillary conditions is metrizable in 1, 2, Hausdorff and developable in 3.

1. The topologies $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ and $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ coincide if and only if X is countably compact. At that all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ coincide.

2. The topology $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ satisfies the first axiom of countability if and only if the closure in Y of any set $f(X)$, where $f \in C(X, Y)$, is compact. At that all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ coincide.

3. The topology $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ satisfies the first axiom of countability if and only if X is countably compact.

Изучаются некоторые топологические свойства пространства непрерывных отображений. Под пространством следует понимать топологическое T_1 -пространство, под отображением – непрерывное отображение. На множестве $C(X, Y)$ рассматриваются компактно-открытая топология $\tau_{\text{a}}^{(X, Y)}$, экспоненциальная топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$, индуцированная на множество $C(X, Y)$ посредством его вложения в пространство $\text{exp}(X \times Y)$ (с топологией Виеториса), а также в случае метризуемого Y топологии равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$, и топология $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ – минимальная по включению, содержащая все тополо-

гии вида $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$. В частности, устанавливаются критерии совпадения $\tau_{\exp}^{(X,Y)} = \tau_{\sup}^{(X,Y)}$ (теорема 5.3), метризуемости топологии $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ (теорема 5.8), а также необходимое и достаточное условие выполнения для $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ первой аксиомы счетности (теорема 6.2).

1. Понятия и обозначения. Для произвольных пространства X и множества $A \subset X$ обозначим: τ_X – топология пространства X ; $\varphi_X, \mathfrak{a}_X$ – семейства всех замкнутых и соответственно всех компактных множеств в X ; $[A]_X, |A|, \tau_X(A)$ – замыкание множества A в X и его мощность и семейство всех его окрестностей в X ($\tau_X(x) = \tau_X(\{x\})$ для точки $x \in X$); $\exp X$ – экспонента пространства X , т. е. множество $\varphi_X \setminus \{\emptyset\}$, снабженное топологией Виеториса $\tau_{\exp}^X$, заданной предбазой, составленной всеми множествами вида $T_1(U) = \{F \in \exp X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$ и $T_2(U) = \{F \in \exp X \mid F \subset U\}$, где $U \in \tau_X$; $C(X, Y)$ – множество всех отображений пространства X в пространство Y ($C(X)$ в случае $Y = R$); $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ – график отображения $f \in C(X, Y)$, $T(X, Y) = \{f \in C(X, Y) \mid |f(X)| = 1\}$; $\tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$ – компактно-открытая топология на $C(X, Y)$, заданная базой, состоящей из всех множеств вида $\langle F_1, \dots, F_n; U_1, \dots, U_n \rangle = \{f \in C(X, Y) \mid f(F_i) \subset U_i, i = \overline{1, n}\}$, где $F_i \in \mathfrak{a}_X, U_i \in \tau_Y, n \in \mathbb{N}$.

Если пространство Y допускает метрику ρ , то на $C(X, Y)$ определена топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$, заданная метрикой $\mu = \mu(\rho)$, определенной формулой $\mu(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ (мы допускаем здесь равенство $\mu(f, g) = \infty$, что совершенно не влияет на топологию). Обозначим далее: Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y ; $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – топология на $C(X, Y)$, заданная предбазой $\bigcup \{\tau_{\mu(\rho)}^{(X,Y)} \mid \rho \in \Omega_Y\}$ (т. е. $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – супремум всех топологий вида $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$).

Семейство α некоторых множеств в пространстве X называется дискретным в X , если для любой точки $x \in X$ найдется $U \in \tau_X(x)$, которая пересекается не более чем с одним элементом α . Множество A назовем дискретным в X , если таковым является семейство $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

Измельчением пространства X называют последовательность открытых покрытий $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, такую, что для любых $x \in X$ и $U \in \tau_X(x)$ найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $\bigcup \{V \in \alpha_n \mid V \ni x\} \subset U$ (более подробно об указанных понятиях см., например, [1]).

2. Топологии $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ и $\tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$. Известные соотношения $\tau_{\mu}^{(X,Y)} \geq \tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$ (т. е. $\tau_{\mu}^{(X,Y)} \supset \tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$) и $\tau_{\mu}^{(X,Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$ при компактном X (при доказательстве равенства $\tau_{\mu}^{(X,Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$ от дополнительного требования хаусдорфовости пространства X , например в [1, с. 390], несложно избавиться) можно дополнить следующим образом.

2.1. Определение. Упорядоченную пару произвольных пространств (X, Y) назовем тихоновской (слабо тихоновской), если в Y можно указать точку $y_0 \in Y$ и ее окрестность $U_0 \in \tau_Y(y_0)$ такие, что для любых $F \in \varphi_X \setminus \{\emptyset, X\}, x \in X \setminus F$ и $V \in \tau_Y(y_0)$ (соответственно для любых $F \in \mathfrak{a}_X \setminus \{\emptyset, X\}$ и $V \in \tau_Y(y_0)$) найдется $f \in C(X, Y)$, для которого $f(F) \subset V$ и $f(x) \notin U_0$ (соответственно $f(F) \subset V$ и $f(X) \cap (X \setminus U_0) \neq \emptyset$).

Очевидно, что любая тихоновская пара (X, Y) с хаусдорфовым X является слабо тихоновской. Отметим также, что если X вполне регулярно, а пространство Y содержит нетривиальную кривую (т. е. неодноточечный непрерывный образ отрезка), то пара (X, Y) тихоновская.

Введенные здесь понятия мотивированы классической теоремой Тихонова о вложении [2].

2.2. Утверждение. Для любой тихоновской пары (X, Y) с регулярным пространством Y существуют некоторое непустое множество T и вложение $X \hookrightarrow \prod_{t \in T} Y_t$, где $Y_t = Y$ для любого $t \in T$.

Доказательство. Через T обозначим множество всех троек $t = (F, x, V)$, где $F \in \varphi_X \setminus \{\emptyset, X\}, x \in X \setminus F, V \in \tau_Y(y_0)$, и для каждой тройки $t \in T$ подберем отображение $X \xrightarrow{f_t} Y_t$, где $Y_t = Y$, как указано в 2.1. Несложно проверить, что отображение $X \xrightarrow{f} \prod_{t \in T} Y_t$, где $f(x) = (f_t(x))_{t \in T}$, реализует гомеоморфизм пространства X на образ $f(X)$.

2.3. Утверждение. Если пара пространств (X, Y) слабо тихоновская, Y допускает метрику ρ и на $C(X, Y)$ $\tau_{\mu}^{(X,Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X,Y)}$, то пространство X компактно.

Доказательство. Допустим от противного, что пространство X не компактно. Выберем точку $y_0 \in Y$, окрестность $U_0 \in \tau_Y(y_0)$ (как указано в 2.1), открытый шар $B_\rho(y_0, \varepsilon) \subset U_0$ и рассмотрим отображение $h \in T(X, Y)$, $h(X) = \{y_0\}$. Легко проверить, что все множества вида $\langle F; U \rangle$, где $F \in \mathfrak{a}_X$, $U \in \tau_Y(y_0)$, составляют локальную базу для h в топологии $\tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$, но ни одно из этих множеств не содержится в открытом шаре $B_\mu(h, \varepsilon)$, что и приводит к противоречию.

3. Топологии $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ и $\tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$. В качестве лемм для произвольных пространств X, Y сформулируем два хорошо известных факта (см., например, [1, с. 136], [3, с. 262]).

3.1. Лемма. Проектирование графика Γ_f на пространство X является гомеоморфизмом (каноническим) для любого $f \in C(X, Y)$.

3.2. Лемма. При хаусдорфовом пространстве Y для любого $f \in C(X, Y)$ график Γ_f является замкнутым множеством в $X \times Y$.

В дальнейшем полагаем пространство Y хаусдорфовым. Тогда в силу 3.2 имеет место инъекция $C(X, Y) \xrightarrow{\Gamma} \text{exp}(X \times Y): f \mapsto \Gamma_f$, посредством которой на множество $C(X, Y)$ индуцируется экспоненциальная топология $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ [3, с. 263].

3.3. Утверждение. Семейство всех множеств вида $O(U) = \{f \in C(X, Y) \mid \Gamma_f \subset U\}$, где $U \in \tau_{X \times Y}$, является базой топологии $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$.

Доказательство. Фиксируем произвольные $f \in C(X, Y)$, $T_1(U) \ni \Gamma_f$, где $U \in \tau_{X \times Y}$, и $(x, y) \in \Gamma_f \cap U$. Подберем $V \in \tau_X(x)$ и $W \in \tau_Y(y)$ такие, что $V \times W \subset U$ и $f(V) \subset W$. Легко проверить, что для $H = (V \times W) \cup \cup ((X \setminus \{x\}) \times Y)$ справедливо соотношение $\Gamma_f \in T_2(H) \subset T_1(U)$. Остается отметить, что $\bigcap_{i=1}^n T_2(U_i) = T_2(\bigcap_{i=1}^n U_i)$ для любого набора $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \tau_{X \times Y}$.

3.4. Утверждение. На $C(X, Y)$ $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} \geq \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$, при этом $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$ в случае компактного X .

Доказательство при дополнительном требовании хаусдорфовости пространства X можно найти в [3, с. 264]. Отказ от этого требования не влечет существенных трудностей.

3.5. Утверждение. Если на $T(X, Y)$ $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$, а в пространстве Y можно указать точку $y_0 \in Y$ и множества $F_n \in \mathfrak{a}_Y$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $y_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, то X счетно компактно.

Доказательство. Можем считать, что $F_1 \subset F_2 \subset \dots$. Предположим от противного, что $X \supset A$, A дискретно в X , $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$). Рассмотрим отображение $h \in T(X, Y)$, $h(X) = \{y_0\}$, и множества $V_n = X \setminus (A \setminus \{a_n\})$, $W_n = Y \setminus F_n$, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \times W_n)$. Ясно, что $h \in O(U)$. Остается проверить, что ни одно из множеств вида $\langle F; H \rangle \cap T(X, Y)$, где $F \in \mathfrak{a}_X$, $H \in \tau_Y(y_0)$, не содержится в $O(U)$, что и приводит к противоречию.

3.6. Следствие. Пусть в пространстве X компактно любое счетно компактное замкнутое множество (пространства с таким свойством называют изокомпактными), а Y такое, как указано в 3.5. Тогда эквивалентны следующие условия: (а) X компактно; (б) на $C(X, Y)$ $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$; (с) на $T(X, Y)$ $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$.

3.7. Утверждение. Если пара (X, Y) слабо тихоновская и на $C(X, Y)$ $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\mathfrak{a}}^{(X, Y)}$, то пространство X компактно.

Доказательство, по сути, то же, что и для 2.3. Вместо $B_\mu(h, \varepsilon)$ достаточно рассмотреть $O(H)$, где $H = X \times U_0$.

4. Топологии $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ и $\tau_\mu^{(X, Y)}$. Далее в этой части считаем пространство Y метризуемым.

4.1. Утверждение. Если пространство Y допускает метрику ρ , то на $C(X, Y)$ $\tau_\mu^{(X, Y)} \leq \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ ($\mu = \mu(\rho)$). При этом $\tau_\mu^{(X, Y)} = \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ в случае счетно компактного X .

Доказательство. Рассмотрим произвольные $f \in C(X, Y)$ и $B_\mu(f, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$), и для любой точки $x \in X$ подберем $O_x \in \tau_X(x)$ такую, что $f(O_x) \subset B_\rho(f(x), \frac{\varepsilon}{3})$. Обозначим $U = \bigcup_{x \in X} \left(O_x \times B_\rho(f(x), \frac{\varepsilon}{3}) \right)$. Ясно, что $f \in O(U)$. Пусть $g \in O(U)$. Для любой точки $(z, g(z)) \in \Gamma_g$ найдется $O_x \times B_\rho(f(x), \frac{\varepsilon}{3}) \ni (z, g(z))$. Но тогда $\rho(g(z), f(z)) \leq \rho(g(z), f(x)) + \rho(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$, откуда $\mu(f, g) < \varepsilon$. Таким образом, $O(U) \subset B_\mu(f, \varepsilon)$ и соотношение $\tau_\mu^{(X, Y)} \leq \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ доказано. Пусть далее X счетно компактно и $f \in O(U)$, где $f \in C(X, Y)$, $U \in \tau_{X \times Y}$. Для каждой точки $x \in X$ подберем $O_x \in \tau_X(x)$ и $n(x) \in \mathbb{N}$, при которых $f(O_x) \subset B_\rho(f(x), \frac{1}{n(x)})$ и $O_x \times B_\rho(f(x), \frac{2}{n(x)}) \subset U$, и обозначим $V_n = \bigcup \{O_x \mid n(x) = n\}$. В силу счетной компактности X найдется $m \in \mathbb{N}$, для которого $\bigcup_{n=1}^m V_n = X$. Рассмотрим произвольные $g \in B_\mu(f, \frac{1}{m})$ и точку $(z, g(z)) \in \Gamma_g$. Пусть $z \in O_x$ и $n(x) = n \leq m$. Поскольку $\rho(g(z), f(x)) \leq \rho(g(z), f(z)) + \rho(f(z), f(x)) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$, то $(z, g(z)) \in O_x \times B_\rho(f(x), \frac{2}{n(x)}) \subset U$, и, следовательно, $B_\mu(f, \frac{1}{m}) \subset O(U)$, что и влечет $\tau_\mu^{(X, Y)} = \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$.

4.2. Утверждение. Если пространство Y допускает метрику ρ и не дискретно, а на $T(X, Y)$ $\tau_\mu^{(X, Y)} = \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ ($\mu = \mu(\rho)$), то пространство X счетно компактно.

Доказательство. Предположим от противного, что $X \supset A$, A такое же, как при доказательстве 3.5, выберем точку $y_0 \in Y$, для которой $y_0 \in [Y \setminus \{y_0\}]_Y$, и рассмотрим отображение $h \in T(X, Y)$, $h(X) = \{y_0\}$. Далее обозначим $V_n = X \setminus (A \setminus \{a_n\})$, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(V_n \times B_\rho(y_0, \frac{1}{n}) \right)$. Остается проверить, что $h \in O(U)$, но $O(U)$ не содержит ни одно множество вида $B_\mu(h, \varepsilon) \cap T(X, Y)$ ($\varepsilon > 0$), что и приводит к противоречию.

5. Топология $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$. Здесь, как и в 4, считаем пространство Y метризуемым. Отметим как очевидное, что $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)} \leq \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$. Исследуем возможность совпадений $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)} = \tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ и $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)} = \tau_\mu^{(X, Y)}$ при некоторой $\mu = \mu(\rho)$ ($\rho \in \Omega_Y$).

5.1. Лемма. Для любого отображения $f \in C(X, Y)$ семейство $\{B_{\mu(\rho)}(f, \varepsilon) \mid \rho \in \Omega_Y, \varepsilon > 0\}$ является его локальной базой в топологии $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$.

Доказательство. Пусть $\rho_i \in \Omega_Y$, $i = \overline{1, n}$. Тогда и $\rho = \max\{\rho_1, \dots, \rho_n\} \in \Omega_Y$ ($\rho(x, y) = \max\{\rho_1(x, y), \dots, \rho_n(x, y)\}$). Обозначим $\mu_i = \mu(\rho_i)$, $\mu = \mu(\rho)$. Несложно доказать, что $\mu = \max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$.

Осталось проверить, что $\bigcap_{i=1}^n B_{\mu_i}(f, \varepsilon) = B_\mu(f, \varepsilon)$.

5.2. Следствие. Для любых $f \in T(X, Y)$, $\rho \in \Omega_Y$ и последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$, где $\varepsilon_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, семейство $\{B_\mu(f, \varepsilon_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($\mu = \mu(\rho)$) представляет локальную базу для f в пространстве $C(X, Y)$ с топологией $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$.

Из соотношений, установленных ранее, вытекает следующая

5.3. Теорема. Пусть Y не дискретно. Тогда эквивалентны условия: (а) все топологии вида $\tau_\mu^{(X, Y)}$ совпадают с $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$; (б) найдется $\rho \in \Omega_Y$ такая, что $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_\mu^{(X, Y)}$, где $\mu = \mu(\rho)$; (с) $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)} = \tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$; (д) $\tau_{\text{exp}}^{(X, Y)}$ и $\tau_{\text{sup}}^{(X, Y)}$ совпадают на $T(X, Y)$; (е) X счетно компактно.

Доказательства (а) $\Rightarrow$ (б), (б) $\Rightarrow$ (с), (с) $\Rightarrow$ (д) очевидны, (д) $\Rightarrow$ (е) в силу 4.2 и 5.2, (е) $\Rightarrow$ (а) в силу 4.1.

5.4. *Замечание.* В случае когда X не счетно компактно, топологии на $C(X, Y)$ вида $\tau_\mu^{(X, Y)}$ могут быть различными. Например, $X = Y = \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ с обычной евклидовой топологией), $\mu_i = \mu(\rho_i)$, $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $\rho_2(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$. Можно показать, что пространство $C(X, Y)$ с топологией $\tau_{\mu_2}^{(X, Y)}$ линейно связно, а с топологией $\tau_{\mu_1}^{(X, Y)}$ распадается в дизъюнктное объединение несчетного семейства открыто-замкнутых линейно связных подпространств.

5.5. **Лемма.** Для любых дискретного в Y семейства $\{U_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \tau_Y$ и множества $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, где $a_n \in U_n$, $n \in \mathbf{N}$, существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$ такая, что $B_\sigma(a_n, 1) \subset U_n$ для каждого $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Фиксируем некоторую $\rho \in \Omega_Y$. Подберем отображения $f_n: Y \rightarrow I = [0, 1]$, для которых $f_n(a_n) = 1$ и $f_n(x) = 0$ при $x \in Y \setminus U_n$ (например, $f_n(x) = \min\{1, \frac{\rho(x, F_n)}{\rho(a_n, F_n)}\}$, где $F_n = Y \setminus U_n$). На

множестве $M = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, где $I_n = I$ для любого $n \in \mathbf{N}$, зададим метрику $m(a, b) = \sup\{|a_n - b_n| \mid n \in \mathbf{N}\}$ ($a = (a_1, a_2, \dots)$, $b = (b_1, b_2, \dots)$), определим отображение $Y \xrightarrow{f} M$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ (проверить непрерывность f несложно), и на $Y \times M$ фиксируем допустимую метрику $v((x, a), (y, b)) = \max\{\rho(x, y), m(a, b)\}$. Отметим, что $v((a_n, f(a_n)), (x, f(x))) \geq 1$ при $x \notin U_n$. В силу 3.1 метрика $\sigma(x, y) = v((x, f(x)), (y, f(y)))$ – искомая.

5.6. **Лемма.** Если множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$, то все топологии вида $\tau_\mu^{(X, Y)}$ совпадают.

Доказательство. Зафиксируем любые две метрики $\rho_1, \rho_2 \in \Omega_Y$ и положим $\mu_i = \mu(\rho_i)$. Допустим от противного, что найдутся $f \in C(X, Y)$ и $\varepsilon > 0$, для которых можно при любом $n \in \mathbf{N}$ выбрать $g_n \in B_{\mu_2}(f, \frac{1}{n})$ такое, что $g_n \notin B_{\mu_1}(f, \varepsilon)$. Но тогда в X можно указать точки x_n , $n \in \mathbf{N}$, так, чтобы

$$\rho_2(f(x_n), g_n(x_n)) < \frac{1}{n} \quad (1)$$

и

$$\rho_1(f(x_n), g_n(x_n)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Компактность множества $[f(X)]_Y$ влечет сходимость некоторой последовательности точек $f(x_{n_i})$ ($n_1 < n_2 < \dots$). В силу (1) сходится и последовательность точек $g_{n_i}(x_{n_i})$, что противоречит неравенству (2).

5.7. *Определение.* Произвольное пространство X назовем локально подвижным, если для любой пары (x_0, U) , где $x_0 \in X$, $U \in \tau_X(x_0)$, найдутся окрестность $V \in \tau_X(x_0)$ и отображение $f \in C(X, X)$ такие, что $V \subset U$, $f(x) = x$ при $x \notin V$, $f(V) \subset V$ и $f(x_0) \neq x_0$.

5.8. **Теорема.** Пусть пространство Y локально подвижно. Тогда эквивалентны следующие условия: (а) топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности (ПАС); (б) топология $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ метризуема; (с) найдется $\rho \in \Omega_Y$ такая, что $\tau_{\sup}^{(X, Y)} = \tau_\mu^{(X, Y)}$, где $\mu = \mu(\rho)$; (д) все топологии вида $\tau_\mu^{(X, Y)}$ совпадают; (е) множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$.

Доказательства (д) $\Rightarrow$ (с) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а) очевидны, (е) $\Rightarrow$ (д) в силу 5.6. Докажем (а) $\Rightarrow$ (е). Допустим от противного, что $[f(X)]_Y$ не компактно для некоторого $f \in C(X, Y)$, и, следовательно, существует дискретное в Y множество $B = \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset [f(X)]_Y$ ($b_i \neq b_j$ при $i \neq j$). Подберем дискретное в Y семейство окрестностей $U_n \in \tau_Y(b_n)$ (см., например, [1, с. 119], [1, с. 452]) и для каждого n фиксируем точку $a_n \in U_n \cap f(X)$. В силу 5.1 можно указать $\rho_n \in \Omega_Y$ и $\mu_n = \mu(\rho_n)$ так, что $\{B_{\mu_n}(f, \varepsilon_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ – локальная база для f в топологии $\tau_{\sup}^{(X, Y)}$ ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$) и $B_{\rho_n}(a_n, \varepsilon_n) \subset U_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Далее для каждой пары $\left(a_n, B_{\rho_n}(a_n, \frac{\varepsilon_n}{3})\right)$ подберем $V_n \in \tau_Y(a_n)$ и $f_n \in C(Y, Y)$, как указано в 5.7, и обозначим $h_n = f_n \circ f$. Легко

показать, что $\mu_n(f, h_n) \leq \frac{2}{3} \varepsilon_n$, откуда $h_n \in B_{\mu_n}(f, \varepsilon_n)$ (1). По лемме 5.5 существует метрика $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $B_\sigma(a_n, 1) \subset V_n \setminus \{f_n(a_n)\}$ для любого $n \in N$. Обозначим $\mu = \mu(\sigma)$. Очевидно, что $h_n \notin B_\mu(f, 1)$ при каждом $n \in N$, и, следовательно, в силу (1) $B_\mu(f, 1)$ не содержит ни одно из множеств $B_{\mu_n}(f, \varepsilon_n)$, что и приводит к противоречию.

5.9. *Замечание.* В примере из 5.4 $\tau_{\sup}^{(X,Y)} < \tau_{\exp}^{(X,Y)}$ и $\tau_{\mu \rho}^{(X,Y)} < \tau_{\sup}^{(X,Y)}$ для любой $\rho \in \Omega_Y$.

6. Топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$. Здесь считаем пространство Y хаусдорфовым.

6.1. **Утверждение.** Пусть топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ удовлетворяет ПАС, а для пары (X, Y) выполняется условие (*): найдется точка $y_0 \in Y$ такая, что для любых $V \in \tau_Y(y_0)$, $F \in \Phi_X \setminus \{\emptyset, X\}$ и $x \in X \setminus F$ можно указать отображение $f \in C(X, Y)$, для которого $f(X) \subset V$, $f(F) = \{y_0\}$ и $f(x) \neq y_0$. Тогда X счетно компактно.

Доказательство. Допустим от противного, что $X \supset A$, A дискретно в X , $A = \{a_n \mid n \in N\}$ ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$). Фиксируем $y_0 \in Y$, как указано в (*), $h \in T(X, Y)$, $h(X) = \{y_0\}$, и множества $U_n \in \tau_{X \times Y}$, $n \in N$, $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, такие, что $\{O(U_n) \mid n \in N\}$ – локальная база для h в $C(X, Y)$. Далее для каждого $n \in N$ подберем $O_n \in \tau_X(a_n)$, $V_n \in \tau_Y(y_0)$ и $f_n \in C(X, Y)$ так, чтобы $O_n \subset X \setminus (A \setminus \{a_n\})$, $O_n \times V_n \subset U_n$, $f_n(X) \subset V_n$, $f_n(X \setminus O_n) = \{y_0\}$ и $f_n(a_n) \neq y_0$. Обозначим $U = (X \times Y) \setminus \{(a_n, f_n(a_n)) \mid n \in N\}$. Легко проверить, что $O(U)$ не содержит ни одно из множеств $O(U_n)$, что ведет к противоречию.

6.2. **Теорема.** Если пространство Y измелячается, а пара (X, Y) удовлетворяет условию (*) из 6.1, то эквивалентны условия: (а) топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ удовлетворяет ПАС; (б) X счетно компактно.

Доказательство. Учитывая 6.1, достаточно доказать (б) $\Rightarrow$ (а). Рассмотрим произвольные $f \in C(X, Y)$ и $O(U) \ni f$, где $U \in \tau_{X \times Y}$. Пусть $\{\alpha_n \mid n \in N\}$ – измелчение пространства Y . Так как измеляемость в сочетании со счетной компактностью влекут компактность [4], для каждого $n \in N$ выберем семейство $\{V_i^n \mid i = \overline{1, m(n)}\} \subset \alpha_n$, покрывающее $f(X)$. Пусть $y \in f(X)$. Для любой $x \in f^{-1}(y)$ подберем $O_x \in \tau_X(x)$ и пару $(n(x), i(x))$ так, чтобы $O_x \times V_{i(x)}^{n(x)} \subset U$ и $f(O_x) \subset V_{i(x)}^{n(x)}$. Далее обозначим $O_i^n = \bigcup \{O_x \mid n(x) = n, i(x) = i\}$ и, используя счетную компактность $f^{-1}(y)$, выберем семейство $\{O_i^{n_1}, \dots, O_i^{n_k}\}$, покрывающее $f^{-1}(y)$. Поскольку отображение f замкнуто (т. е. $f(F) \in \Phi_Y$ для любого

$F \in \Phi_X$), найдется $V_q^p \in \tau_Y(y)$, для которого $f^{-1}(V_q^p) \times V_q^p \subset \bigcup_{j=1}^k (O_{i_j}^{n_j} \times V_{i_j}^{n_j})$. Ясно, что $f^{-1}(y) \times \{y\} \subset$

$\subset f^{-1}(V_q^p) \times V_q^p \subset U$. Из счетной компактности Γ_f (см. 3.1) следует, что $\Gamma_f \subset \bigcup_{i=1}^n (f^{-1}(V_{q_i}^{p_i}) \times V_{q_i}^{p_i}) \subset U$

для некоторых наборов $(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n)$, что и доказывает требуемое.

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.

2. Тихонов А. Н. // Math. Ann. 1930. Vol. 102. P. 544.

3. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М., 2006.

4. Chaber J. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. 1976. Vol. 24. P. 993.

Поступила в редакцию 23.02.09.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

Дарья Сергеевна Фролова – магистрант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.