УДК 512.542

П.А. ЖИЗНЕВСКИЙ

τ-ЗАМКНУТЫЕ ω-КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ С НИЛЬПОТЕНТНЫМ c_{ω}-ДЕФЕКТОМ 1

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty τ-closed ω-composition formation, $\mathfrak{N}$ be the formation of all nilpotent groups and $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Then $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ is denote the sublattice of the lattice c^{τ}_{ω} such that contains all τ-closed ω-composition formations between $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ and $\mathfrak{F}$. A nilpotent c^{τ}_{ω}-defect of the formation $\mathfrak{F}$ is called the length of lattice $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. In this paper we describe non-nilpotent τ-closed ω-composition formations of finite groups with the nilpotent c^{τ}_{ω}-defect 1.

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Используется терминология, принятая в [1, 2]. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольный непустой класс простых абелевых групп и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Тогда любую функцию вида $f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах, называют ω-композиционным спутником. Напомним, что через $R_{\omega}(G) = O_{\omega}(G) \cap G_{\mathfrak{S}}$ обозначают наибольшую нормальную разрешимую ω-подгруппу группы G, а символом $C^{p}(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^{p}(G) = G$). Для произвольного ω-композиционного спутника f полагают $CF_{\omega}(f) = \{G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/C^{p}(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(Com(G)) \cap \omega\}$, где $Com(G)$ – множество всех абелевых композиционных факторов группы G. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f – ω-композиционный спутник этой формации.

Подгрупповым функтором (в смысле А.Н. Скибы [1]) называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

1) $G \in \tau(G)$;

2) для всякого эпиморфизма φ: $A \to B$, и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В данной работе мы рассматриваем только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G множество $\tau(G)$ содержится во множестве всех субнормальных подгрупп группы G.

Напомним, что решетку всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций обозначают символом c_{ω}^{τ}, а через $c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$.

Если τ-замкнутая ω-композиционная формация $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп), но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}$, для каждой собственной τ-замкнутой ω-композиционной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ-замкнутой ω-композиционной ненильпотентной формацией.

Решетка называется модулярной, если для любых ее элементов x, y, z из $x \le z$ следует, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Если $\mathfrak{F}$ – непустая ненильпотентная τ-замкнутая ω-композиционная формация, то через $\mathfrak{F}/_{\omega}^{\tau}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ обозначается подрешетка решетки c_{ω}^{τ}, состоящая из всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$. Нильпотентным c_{ω}^{τ}-дефектом (или $\mathfrak{N}_{\omega}^{\tau}$-дефектом) формации $\mathfrak{F}$ называют длину решетки $\mathfrak{F}/_{\omega}^{\tau}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Понятие дефекта формации и описание насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2 впервые дано в [3]. Исследованию формаций того или иного вида с ограниченным дефектом посвящены работы В.В. Аниськова, В.Г. Сафонова, А.И. Рябченко, С.В. Чиспиякова, И.П. Шабалиной и др. Так, в [4] описаны ненильпотентные композиционные формации с максимальной композиционной подформацией (или, иначе, с $\mathfrak{N}_c$-дефектом 1), в работе [5] получено описание ненильпотентных $\mathfrak{L}$-композиционных формаций с максимальной $\mathfrak{L}$-композиционной подформацией (или, иначе, с $\mathfrak{N}^{\mathfrak{L}}$-дефектом 1). Развивая результаты работ [4, 5], в настоящей статье мы даем описание τ-замкнутых ω-композиционных формаций, имеющих нильпотентный c_{ω}^{τ}-дефект 1.

Лемма 1. *Пусть f_i – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $f = \vee^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_{\omega}^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация из условия леммы и пусть $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i$. Установим справедливость равенства $\pi_1 = \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi_2$. Включение $\pi_1 \subseteq \pi_2$ очевидно. Покажем обратное включение. Предположим противное, т. е. $\pi_2 \not\subseteq \pi_1$, и пусть $p \in \pi_2 \setminus \pi_1$. Если t – минимальный ω-композиционный τ-значный спутник формации $\mathfrak{F} = c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X} = c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{F}$, то, с одной стороны, из условия 3 теоремы 1 [6] имеем $t(p) = \varnothing$. С другой стороны, из условия 2 теоремы 1 [6] получаем $t(p) = \tau\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}) \ne \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $\pi_2 \subseteq \pi_1$. Таким образом, $\pi_1 = \pi_2$.

Пусть h – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $f(a) = h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Если $a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{X}))$, то по теореме 1 [6] получим $f_i(q) = \varnothing$ для любого $i \in I$. Значит, $f(q) = \varnothing$. Однако из того, что h – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, снова, применяя теорему 1 [6], имеем $h(q) = \varnothing$. Значит, $f(q) = h(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{X}))$.

Пусть $a = p \in \pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega$. По теореме 1 [6] имеет место

$$h(p) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}(C^p)) = \tau\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X} = \textstyle\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i) =$$
$$= \tau\mathrm{form}(\textstyle\bigcup_{i \in I}\tau\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \tau\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p)) = \vee^{\tau}(f_i(p) \mid i \in I) = f(p).$$

Аналогично, если $a = \omega'$, то

$$h(\omega') = \tau\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X} = \textstyle\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i) =$$
$$= \tau\mathrm{form}(\textstyle\bigcup_{i \in I}\tau\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \tau\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')) = \vee^{\tau}(f_i(\omega') \mid i \in I) = f(\omega').$$

Таким образом, $f = \vee^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ – *нильпотентная* ω-*композиционная формация и* m – *ее минимальный* τ-*значный* ω-*композиционный спутник. Тогда*

$$m(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}, & \text{если } a = \omega'; \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Доказательство. Из теоремы 1 [6] имеем

$$m(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}), & \text{если } a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \tau\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}), & \text{если } a = \omega'; \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Пусть $a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega$ и $G \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – нильпотентная формация, то G – нильпотентная группа. Тогда $C^p(G) = G$. Следовательно, $m(p) = \tau\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}) = \tau\mathrm{form}(G/G \mid G \in \mathfrak{M}) = (1)$. Пусть теперь $a = \omega'$ и $G \in \mathfrak{M}$. Покажем, что $m(\omega') \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$. Так как $R_\omega(G)$ – холлова подгруппа группы G, то $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{N}_{\omega'}$. Кроме того, понятно, что $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $G/R_\omega(G) \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$. Теперь, поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$ – нильпотентная формация, а так как всякая нильпотентная формация s-замкнута, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$ является τ-замкнутой формацией. Поэтому $m(\omega') = \tau\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$. Покажем обратное включение. Пусть $A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$. Тогда, очевидно, $R_\omega(A) = 1$, и поэтому $A \cong A/1 = A/R_\omega(A) \in m(\omega')$. Последнее означает, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'} \subseteq m(\omega')$. Таким образом, $m(\omega') = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$. Лемма доказана.

Лемма 3 . *Пусть* $\Omega = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ – *некоторый набор минимальных* τ-*замкнутых* ω-*композиционных ненильпотентных формаций*, $\mathfrak{M}$ – *нильпотентная* ω-*композиционная формация. Тогда, если* $\mathfrak{H}$ – *некоторая минимальная* τ-*замкнутая* ω-*композиционная ненильпотентная подформация из* $\mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\vee_\omega^\tau \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, *то* $\mathfrak{H} \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\vee_\omega^\tau \mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, f и m – минимальные τ-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, и для каждого $i \in I$ пусть h_i – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}_i$. Тогда по лемме 1 получаем

$$f(a) = \tau\mathrm{form}(m(a) \cup \tau\mathrm{form}(\cup_{i \in I} h_i(a))) = \tau\mathrm{form}(m(a) \cup (\cup_{i \in I} h_i(a)))$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Ввиду леммы 2 имеем

$$m(a) = \begin{cases} (1), & \text{если } a = p \in \pi(Com(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_{\omega'}, & \text{если } a = \omega'; \\ \varnothing, & \text{если } a = q \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

Используя последнее, получаем

$$f(a) \subseteq \tau\mathrm{form}((1) \cup (\cup_{i \in I} h_i(a))),$$

если $a \in \omega$ и

$$f(\omega') = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}_{\omega'} \cup (\cup_{i \in I} h_i(\omega'))).$$

Так как $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация, то из следствия 4 [7] имеем $\mathfrak{H} = c_\omega^\tau \mathrm{form} H$, где H – такая монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа с цоколем $P = H^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(H)$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и H – группа Шмидта. Аналогично, поскольку $\mathfrak{H}_i$ – минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация, то ввиду следствия 4 [7] имеем $\mathfrak{H}_i = c_\omega^\tau \mathrm{form} H_i$, где H_i – такая монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа с цоколем $P_i = H_i^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(H_i)$, что либо $\pi_i = \pi(Com(P_i)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi_i \neq \varnothing$ и H_i – группа Шмидта.

Пусть для группы H имеет место $\pi = \varnothing$. Тогда $R_\omega(H) = 1$. Введем обозначения

$$I_1 = \{i \in I \mid \pi_i \neq \varnothing\}, \qquad I_2 = \{i \in I \mid \pi_i = \varnothing\},$$
$$\mathfrak{X}_1 = \{H_i/R_\omega(H_i) \mid i \in I_1\}, \quad \mathfrak{X}_2 = \{H_i \mid i \in I_2\},$$
$$\mathfrak{X}_1^* = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}) \bigcup \mathfrak{X}_1.$$

Поскольку $H \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то, используя теорему 1 [6] и лемму 1.2.22 [1], получим

$$H \cong H/R_\omega(H) \in f(\omega') = \tau\mathrm{form}((\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{N}_{\omega'}) \bigcup (\bigcup_{i\in I} h_i(\omega'))) =$$
$$= \tau\mathrm{form}((\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{N}_{\omega'}) \bigcup (\bigcup_{i\in I_1} h_i(\omega')) \bigcup (\bigcup_{i\in I_2} h_i(\omega'))) = \tau\mathrm{form}((\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{N}_{\omega'}) \bigcup \{H_i/R_\omega(H_i) \mid i \in I_1\} \bigcup \{H_i \mid i \in I_2\}) =$$
$$= \tau\mathrm{form}((\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{N}_{\omega'}) \bigcup \mathfrak{X}_1 \bigcup \mathfrak{X}_2) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}_1^* \bigcup \mathfrak{X}_2) =$$
$$= \mathrm{form}(S_\tau(\mathfrak{X}_1^* \bigcup \mathfrak{X}_2)) = \mathrm{form}(S_\tau(\mathfrak{X}_1^*) \bigcup S_\tau(\mathfrak{X}_2)) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}_1^* \cup \overline{\mathfrak{X}_1^*} \bigcup \mathfrak{X}_2 \bigcup \overline{\mathfrak{X}}_2),$$

где $\overline{\mathfrak{X}_1^*} = S_\tau(\mathfrak{X}_1^*) \setminus \mathfrak{X}_1^*$, $\overline{\mathfrak{X}}_2 = S_\tau(\mathfrak{X}_2) \setminus \mathfrak{X}_2$. Обозначим через $\mathfrak{X}_1^{**} = \mathfrak{X}_1^* \bigcup \overline{\mathfrak{X}_1^*} \bigcup \overline{\mathfrak{X}}_2$. Таким образом, $H \in \mathrm{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \bigcup \mathfrak{X}_2)$. Покажем, что у каждой группы T из $\mathfrak{X}_1^{**} \bigcup \mathfrak{X}_2$ $\mathfrak{N}$-корадикал $T^{\mathfrak{N}}$ не имеет фраттиниевых T-главных факторов. Покажем прежде, что $\mathfrak{X}_1^{**} \subseteq \mathfrak{N}$. Действительно, если $A \in \mathfrak{X}_1$, то для некоторого $i \in I_1$ имеем $A = H_i/R_\omega(H_i)$. Так как для данного i имеем $\pi_i \neq \varnothing$, то в этом случае H_i – группа Шмидта. Из описания групп Шмидта известно, что $H_i = [P_i]\, Q_i$ и $H_i/P_i \cong Q_i \in \mathfrak{N}$, где P_i – абелева p_i-группа, $p_i \in \omega$ и $|Q_i| = q_i$. Поскольку $p_i \in \omega$, то $P_i \subseteq R_\omega(H_i)$. Значит, $A = H_i/R_\omega(H_i) \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Учитывая, что формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\omega'}$ также содержится в $\mathfrak{N}$, получаем $\mathfrak{X}_1^* \subseteq \mathfrak{N}$. Кроме того, понятно, что $\overline{\mathfrak{X}_1^*} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\overline{\mathfrak{X}}_2 \subseteq \mathfrak{N}$. Итак, $\mathfrak{X}_1^{**} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, если $T \in \mathfrak{X}_1^{**}$, то $T^{\mathfrak{N}} = 1$. Напомним, что H_i – монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа с цоколем $P_i = H_i^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(H_i)$. Теперь, если $T \in \mathfrak{X}_2$, то для некоторого $i \in I_2$ имеем $T = H_i$ и $T^{\mathfrak{N}} = H_i^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(H_i)$.

Итак, $H \in \mathrm{form}(\mathfrak{X}_1^{**} \bigcup \mathfrak{X}_2) \setminus \mathfrak{N}$ и у каждой группы T из $\mathfrak{X}_1^{**} \bigcup \mathfrak{X}_2$ $\mathfrak{N}$-корадикал $T^{\mathfrak{N}}$ не имеет фраттиниевых T-главных факторов. Тогда по лемме 1.2.29 [1] группа H является гомоморфным образом некоторой группы G из $\mathfrak{X}_1^{**} \bigcup \mathfrak{X}_2$. Поскольку H ненильпотентна, то $G \notin \mathfrak{X}_1^{**}$. Значит, H – гомоморфный образ некоторой группы G из $\mathfrak{X}_2$. Тогда $G = H_i$ для некоторого $i \in I_2$ и $H \cong H_i/K$ для некоторой нормальной подгруппы K группы H_i. Пусть $K \neq 1$. Тогда поскольку $P_i \subseteq K$ и $H_i/P_i \in \mathfrak{N}$, то $H \cong H_i/K \in \mathfrak{N}$. Противоречие. Следовательно, $K = 1$ и $H \cong H_i$. Таким образом, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i \in \Omega$.

Предположим теперь, что $\pi \neq \varnothing$ и H – группа Шмидта. Тогда из описания групп Шмидта имеем $H = [P]\, Q$ и $H/P \cong Q$, где $P = C^p(H)$, $p \in \omega$ и $|Q| = q$. По теореме 1 [6] получаем

$$Q \cong H/P = H/C^p(H) \in f(p) \subseteq \tau\mathrm{form}((1) \cup (\cup_{i\in I} h_i(p))) = \tau\mathrm{form}((1) \cup (\bigcup_{i\in I_1} h_i(p)) \cup (\bigcup_{i\in I_2} h_i(p))).$$

Пусть $i \in I_2$ и $\pi_i = \varnothing$. Тогда из теоремы 1 [6] получаем

$$h_i(p) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}(H_i/C^p(H_i)), & \text{если } p \in \pi(Com(H_i)) \cap \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi \setminus \pi(Com(H_i)). \end{cases}$$

Так как в этом случае $p \notin \pi(Com(P_i))$, то по лемме 1 [2] имеем $C^p(H_i/P_i) = C^p(H_i)/P_i$. Тогда, учитывая, что $H_i/P_i \in \mathfrak{N}$, и то, что $\mathfrak{N}$ – ω-композиционная формация, получаем

$$H_i/C^p(H_i) \cong (H_i/P_i)/(C^p(H_i)/P_i) = (H_i/P_i)/C^p(H_i/P_i) \in n(p),$$

где n – минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{N}$. Из леммы 2 следует, что $n(p) = (1)$. Значит, $H_i/C^p(H_i) = 1$, поэтому $H_i = C^p(H_i)$. Следовательно,

$$h_i(p) \subseteq \tau\mathrm{form}(H_i/C^p(H_i)) = (1),$$

где $p \in \pi(Com(H_i))$. Таким образом, если $i \in I_2$, то $h_i(p) \subseteq (1)$.

Пусть теперь $i \in I_1$. Тогда $p_i \in \pi_i \neq \varnothing$ и H_i – группа Шмидта. Из описания групп Шмидта известно, что $H_i = [P_i]\, Q_i$ и $H_i/P_i \cong Q_i$ – q_i-группа, где P_i – абелева p_i-группа, $p_i \in \omega$, $q_i \neq p_i$. Кроме того, ясно, что $P_i = C^{p_i}(H_i)$, $|Q_i| = q_i$. Значит, ввиду теоремы 1 [6] имеем

$$h_i(p) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}Q_i, & \text{если } p = p_i, \\ \tau\mathrm{form}(H_i/C^P(H_i)), & \text{если } p \in (\pi(Com(H_i)) \cap \pi) \setminus \pi(Com(P_i)), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(Com(H_i)). \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее случай, когда $p \in (\pi(Com(H_i)) \cap \pi) \setminus \pi(Com(P_i))$. Если $C^p(H_i) \subseteq P_i$, то, учитывая, что $O_p(H_i) \subseteq C^p(H_i)$, получаем $O_p(H_i) \subseteq P_i$, т. е. $O_p(H_i)$ – p_i-группа. Противоречие. Значит, $P_i \subseteq C^p(H_i)$. Так как $H_i/P_i = H_i/C^{p_i}(H_i) \in h_i(p_i)$, то $H_i/C^p(H_i) \in h_i(p_i) = \tau\mathrm{form}\, Q_i$. Следовательно, $h_i(p) \subseteq \tau\mathrm{form}\, Q_i$. Таким образом, если $i \in I_1$, то в любом случае $h_i(p) \subseteq \tau\mathrm{form}\, Q_i$. Итак,

$$Q \in \tau\mathrm{form}((1) \cup (\textstyle\bigcup_{i\in I_1} h_i(p)) \cup (\bigcup_{i\in I_2} h_i(p))) \subseteq \tau\mathrm{form}((1) \cup (\bigcup_{i\in I_1} \tau\mathrm{form}\, Q_i) \cup (\bigcup_{i\in I_2} (1))) =$$

$$= \tau\mathrm{form}((1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}) = [\text{так как } Q_i \in \mathfrak{N}] = s\mathrm{form}((1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}).$$

Теперь поскольку группа Q простая, то по лемме 8.12 [8] получаем, что Q изоморфна некоторому главному фактору некоторой группы G из $(1) \cup \{Q_i \mid i \in I_1\}$. Так как $Q \neq 1$ и Q_i – простая, то для некоторого $i \in I_1$ имеем $Q \cong Q_i$. Ввиду того что минимальный спутник является внутренним, получаем

$$H/O_p(H) = H/P \cong Q \cong Q_i \in h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_i.$$

По лемме 4 [2] из последнего вытекает $H \in \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I_1$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_i$. Если $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_i$, то поскольку $\mathfrak{H}_i$ – минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация, то $\mathfrak{H} \in \mathfrak{N}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i \in \Omega$. Теорема доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5.2.8 из [1].

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ – τ-*замкнутые* ω-*композиционные формации, причем* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau \mathfrak{X}$. *Тогда, если* m, r *и* t *соответственно* $\mathfrak{N}_\omega^\tau$-*дефекты формаций* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ *и* $m, r < \infty$, то $t \leq m + r$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-*замкнутая* ω-*композиционная ненильпотентная формация. В том и только том случае нильпотентный* c_ω^τ-*дефект формации* $\mathfrak{F}$ *равен* 1, *когда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau \mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ – *нильпотентная* τ-*замкнутая* ω-*композиционная формация,* $\mathfrak{H}$ – *минимальная* τ-*замкнутая* ω-*композиционная ненильпотентная формация, при этом:*

1) *всякая нильпотентная* τ-*замкнутая* ω-*композиционная подформация из* $\mathfrak{F}$ *входит в* $\mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) *всякая ненильпотентная* τ-*замкнутая* ω-*композиционная подформация* $\mathfrak{F}_1$ *из* $\mathfrak{F}$ *имеет вид* $\mathfrak{H} \vee_\omega^\tau (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть нильпотентный c_ω^τ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Поскольку $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация, то по теореме 1 [9] в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$. Так как при этом $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$ – максимальная нильпотентная τ-замкнутая ω-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau \mathfrak{H}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ – τ-замкнутая ω-композиционная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Пусть нильпотентные c_ω^τ-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ – τ-замкнутая ω-композиционная нильпотентная формация, то $m = 0$. Так как $\mathfrak{H}$ – минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная формация, то ее нильпотентный c_ω^τ-дефект r равен 1. В силу леммы 4 для нильпотентного c_ω^τ-дефекта формации $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство $t \leq m + r = 0 + 1 = 1$.

Если $t = 0$, то $\mathfrak{F}$ – нильпотентная формация, что противоречит условию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, нильпотентный c_ω^τ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1.

Докажем теперь справедливость утверждений второй части теоремы. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau \mathfrak{H}$, то по лемме 3 в $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых ω-композиционных ненильпотентных формаций, отличных от $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$ – максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация в $\mathfrak{H}$, то ввиду теоремы 1 [10] и теоремы 13 [11] имеем

$$(\mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})) \vee_\omega^\tau \mathfrak{H} /_\omega^\tau \mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}) \cong \mathfrak{H} /_\omega^\tau (\mathfrak{M} \vee_\omega^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H} /_\omega^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \vee_\omega^\tau (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{H} /_\omega^\tau \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M} \vee_{\omega}^{\tau} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$ – максимальная τ-замкнутая ω-композиционная подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$, то всякая τ-замкнутая ω-композиционная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{\omega}^{\tau} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ – произвольная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду теоремы 1 [9] в $\mathfrak{F}_1$ имеется по крайней мере одна минимальная τ-замкнутая ω-композиционная ненильпотентная подформация. Но по лемме 3 в $\mathfrak{F}$ нет минимальных τ-замкнутых ω-композиционных ненильпотентных формаций, отличных от $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, ввиду теоремы 1 [10] получаем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H} \vee_{\omega}^{\tau} \mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \vee_{\omega}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \vee_{\omega}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{H} \vee_{\omega}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Теорема доказана.

1. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
2. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 6. С. 783.
3. С к и б а А. Н., Т а р г о н с к и й Е. А. // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 4. С. 490.
4. Ч и с п и я к о в С. В. О композиционных формациях с заданными системами нильпотентных подформаций; Брян. гос. пед. ун-т. Брянск, 1998. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 26.10.98, № 3098 В98 // РЖМат. 1999, 5А119.
5. Ж и з н е в с к и й П. А., С а ф о н о в В. Г. // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Серия С. Фундамент. науки. 2007. № 9. С. 30.
6. З а д о р о ж н ю к М. В., С к и б а А. Н. О минимальных τ-значных ω-композиционных спутниках формаций // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2007. № 3. С. 31.
7. B e l o u s (B u y a k e v i c h) L. I., S e l' k i n V. M. // Algebra and discrete mathematics. 2006. № 4. P. 1.
8. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
9. Б е л о у с (Б у я к е в и ч) Л. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 21.
10. З а д о р о ж н ю к М. В. // Классы групп, алгебр и их приложения: Материалы Междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова. Гомель, 2007. С. 73.
11. Б и р к г о ф Г. Теория решеток. М., 1984.

Поступила в редакцию 15.05.09.

Павел Александрович Жизневский – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, доцент В.Г. Сафонов.