$f\,(\quad)$

УДК 512.547

О.И. ТАВГЕНЬ, ЯН СИНЬСУН (КНР)

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $F_2\,(x, y)$ В $GL(5, C)$ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Let $\rho : F_2(x, y) \to GL(5, C)$ be a matrix representation of F_2, where F_2 is a free group of rank two with generators x and y. Then $\rho(F_2)$ is a unipotent subgroup in $GL(5, C)$ if the images of x, y and of any primitive element from F_2 are unipotent matrixes.

Пусть $F_2(x, y)$ – свободная группа с образующими x и y. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы. Рассмотрим представление этой группы $\rho : F_2(x,y) \to GL(n,C)$, при котором образующие и все примитивные элементы группы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ F_2 относительно представления ρ [1]. В [2] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц малых порядков $(n = 2,3,4)$. В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос для $n = 5$.

Теорема 1. *Образ $F_2(x,y)$ относительно $\rho : F_2(x,y) \to GL(5,\mathbb{C})$ – унипотентная подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$ при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы.*

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2. Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p, имеют вид $p^{\alpha} q^{\varepsilon} p^{\beta}$* $(\alpha,\beta = 0,\pm1,\pm2,\cdots;\varepsilon = \pm1)$ [3].

Лемма 2. *Пусть A – унипотентная матрица порядка n, $Y = \mathrm{diag}(Y_1,\ldots,Y_s)$ – ее нормальная жорданова форма, где $Y_1,\ldots,Y_s$ – клетки Жордана. Пусть X – матрица, перестановочная с Y. Тогда*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix},$$

где $Y_p X_{pq} = X_{pq} Y_p$ $(p,q = 1,...,s)$ [4].

Лемма 3. *Образ $F_2(x,y)$ относительно $\rho : F_2(x,y) \to GL(n,\mathbb{C})$ $(n = 2,3,4)$ – унипотентная подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$ при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы* [2].

Через Y_s обозначается клетка Жордана порядка s с собственным значением 0, через E_k – единичная матрица порядка k.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho(x) = A$, $\rho(y) = B$. Доказательство разбивается на ряд случаев в зависимости от вида жордановой нормальной формы матрицы A.

а) Предположим, что подходящим сопряжением A можно привести к виду $A = Y_5$. Пусть $B = (x_{ij})$, $H = A - E$. Тогда $H = \begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $H^5 = 0$.

Поскольку $A, B, AB, A^2B, A^3B, A^4B$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем

$$\mathrm{tr}\, B = \mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, A^2B = \mathrm{tr}\, A^3B = \mathrm{tr}\, A^4B.$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\, HB = \mathrm{tr}\, H^2B = \mathrm{tr}\, H^3B = \mathrm{tr}\, H^4B = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_{21} + x_{32} + x_{43} + x_{54} = 0, \\ x_{31} + x_{42} + x_{53} = 0, \\ x_{41} + x_{52} = 0, \\ x_{51} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $a = x_{41}$, $-a = x_{52}$. Докажем, что $a = 0$. Пусть $a \neq 0$. Тогда подходящим сопряжением получаем 0 на месте x_{42}. Пусть $x_{53} = b$, тогда $x_{31} = -b$ (из второго уравнения в (1)) и

$$\mathrm{tr}\, H^3BH^3B = -\mathrm{tr}\, H^4BH^2B, \quad \mathrm{tr}\, H^4BHB = -\mathrm{tr}\, H^3BH^2B, \quad \mathrm{tr}\, H^m BH^t B = 0, \quad m + t \geq 7.$$

Поскольку BAB, $ABAB$, A^2BAB, ABA^2B, A^2BA^2B, A^3BA^2B, A^2BA^3B, A^3BA^3B, A^4BA^3B, A^3BA^4B, A^4BA^4B, A^5BA^4B, $A^{-1}B$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то у них одинаковые следы. Отсюда получаем однородную систему линейных уравнений относительно $\mathrm{tr}\, H^2B^2$, $\mathrm{tr}\, HBHB$, $\mathrm{tr}\, H^2BHB$, $\mathrm{tr}\, H^3B^2$, $\mathrm{tr}\, H^4B^2$, $\mathrm{tr}\, H^2BH^2B$, $\mathrm{tr}\, H^3BHB$, $\mathrm{tr}\, H^2BH^3B$, $\mathrm{tr}\, HBH^4B$, $\mathrm{tr}\, H^3BH^3B$,

$\operatorname{tr} H^2BH^4B.$ Решая ее, находим, что все эти следы равны 0. Тогда $\operatorname{tr} H^3BH^3B = 2a^2 = 0.$ Поэтому $a = 0.$ Получили противоречие. Итак, $a = 0.$

Так как $\operatorname{tr} H^3BHB = -x_{42}^2 = 0,$ то $x_{42} = 0.$ Теперь из равенства $\operatorname{tr} H^2BH^2B = 2x_{31}^2 = 0$ получаем $x_{31} = 0.$ Учитывая второе уравнение из (1), находим $x_{53} = 0.$

Так как $\operatorname{tr} HB = \operatorname{tr} HBHB = \operatorname{tr} H^2B^2 = 0,$ то мы имеем

$$x_{21} + x_{32} + x_{43} + x_{54} = 0,\ x_{21}^2 + x_{32}^2 + x_{43}^2 + x_{54}^2 = 0,\ x_{21}x_{32} + x_{32}x_{43} + x_{43}x_{54} = 0. \qquad (2)$$

Поскольку $B^sAB^t,\ B^2ABA,\ (AB)^3$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то у них одинаковые следы. Поэтому имеем $\operatorname{tr}(HB)^3 = 0,$ т. е.

$$x_{21}^3 + x_{32}^3 + x_{43}^3 + x_{54}^3 = 0. \qquad (3)$$

Решая систему (2) – (3), получаем $x_{21} = x_{32} = x_{43} = x_{54} = 0.$ Значит, A и B одновременно триангуалируемы и $\rho(F_2)$ – унитреугольная подгруппа в $GL(5,\mathbb{C}).$

б) Пусть $A = \begin{pmatrix} Y_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $B = (x_{ij}).$ Обозначим $H = A - E.$ Тогда $H = \begin{pmatrix} 0 & E_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $H^4 = 0.$ Поскольку A, B, AB, A^2B, A^3B – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} A^2B = \operatorname{tr} A^3B.$ Поэтому

$$\operatorname{tr} HB = \operatorname{tr} H^2B = \operatorname{tr} H^3B = 0.$$

Следовательно,

$$x_{21} + x_{32} + x_{43} = 0,\ x_{31} + x_{42} = 0,\ x_{41} = 0.$$

Заметим, что $\operatorname{tr} H^2BH^3B = \operatorname{tr} H^3BH^3B = 0.$ Из соотношений

$$\operatorname{tr} B^2 = \operatorname{tr} AB^2 = \operatorname{tr}(AB)^2 = \operatorname{tr} A^2BAB = \operatorname{tr} A^2BA^2B = \operatorname{tr} A^3BA^2B = \operatorname{tr} A^3BA^3B = \operatorname{tr} A^3BA^4B$$

получаем, во-первых, $\operatorname{tr} HB^2 = \operatorname{tr} HBHB = 0,$ а во-вторых, однородную систему линейных уравнений относительно $\operatorname{tr} H^2B^2,$ $\operatorname{tr} H^3B^2,$ $\operatorname{tr} HBH^2B,$ $\operatorname{tr} HBH^3B,$ $\operatorname{tr} H^2BH^2B$ с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 18 & 6 & 9 \\ 9 & 5 & 30 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Так как C – невырождена, то

$$\operatorname{tr} H^2B^2 = \operatorname{tr} H^3B^2 = \operatorname{tr} HBH^2B = \operatorname{tr} HBH^3B = \operatorname{tr} H^2BH^2B = 0.$$

Из равенства $\operatorname{tr} H^2BH^2B = 2x_{31}^2 = 0$ следует, что $x_{31} = x_{42} = 0.$ Кроме того, $\operatorname{tr} H^3B^2 = x_{51}x_{45} = 0.$ Далее, из равенства $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(AB)^3$ следует, что $\operatorname{tr}(HB)^3 = 0.$ Теперь из равенств $\operatorname{tr} HB = \operatorname{tr}(HB)^2 = \operatorname{tr}(HB)^3 = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} x_{21} + x_{32} + x_{43} = 0, \\ x_{21}^2 + x_{32}^2 + x_{43}^2 = 0, \\ x_{21}^3 + x_{32}^3 + x_{43}^3 = 0. \end{cases}$$

Поэтому $x_{21} = x_{32} = x_{43} = 0.$ Поскольку $x_{51}x_{45} = 0,$ тогда имеем либо $x_{51} = 0,$ либо $x_{45} = 0.$ Если $x_{51} = 0,$ то B – клеточно-треугольная матрица. Таким образом, $\rho(F_2)$ – приводимая подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$ и ситуация сводится к случаю $n \le 4$ (лемма 3).

Если $x_{51} \ne 0,$ тогда, используя уравнения $x_{51}x_{45} = 0,$ $\operatorname{tr} HB^2 = \operatorname{tr} H^2B^2 = 0,$ получаем $x_{25} = x_{35} = x_{45} = 0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей $T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & E_3 & 0 \\ t_3 & 0 & t_4 \end{pmatrix},$ получаем $A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$

$B=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$. Следовательно, $\rho(F_2)$ снова приводимая подгруппа в $GL(5,C)$ и можно использовать лемму 3.

в) Пусть $A=\begin{pmatrix}Y_2 & 0 \\ 0 & Y_3\end{pmatrix}$, $B=(x_{ij})$. Пусть $H=A-E$. Тогда $H^3=0$. Аналогично случаю б), получаем

$$\operatorname{tr} HB=\operatorname{tr} H^2B=\operatorname{tr} HB^s=\operatorname{tr} H^sB^2=\operatorname{tr} H^tBH^sB=\operatorname{tr}(HB)^t=0, \quad s,t=1,2,3.$$

Поэтому имеем систему

$$\begin{cases} x_{21}+x_{43}+x_{54}=0, \\ x_{53}=0, \\ x_{51}x_{23}=0, \\ x_{21}^2+x_{43}^2+x_{54}^2+2x_{51}x_{24}+2x_{41}x_{23}=0, \\ x_{21}^3+x_{43}^3+x_{54}^3+3x_{51}x_{24}x_{21}+3x_{54}x_{51}x_{24}+3x_{41}x_{23}x_{21}+3x_{41}x_{23}x_{43}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим случай $x_{51}=0$, $x_{23}\neq 0$. Тогда система (4) приводится к виду

$$\begin{cases} x_{21}+x_{43}+x_{54}=0, \\ x_{21}^2+x_{43}^2+x_{54}^2+2x_{41}x_{23}=0, \\ x_{21}^3+x_{43}^3+x_{54}^3+3x_{41}x_{23}x_{21}+3x_{41}x_{23}x_{43}=0. \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) получаем $x_{54}=x_{41}x_{23}-x_{43}x_{21}=0$. Рассмотрим матрицу $D=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{23} \\ x_{41} & x_{43}\end{pmatrix}$, составленную из элементов матрицы B. Тогда $\operatorname{tr} D=0$, $\det D=0$. Поэтому D либо нулевая, либо сопряжением приводится к виду $D=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. В первом случае $x_{23}=0$. Получили противоречие. Во втором случае, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $T=\begin{pmatrix}aE_2 & 0 & bE_2 \\ cE_2 & dE_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}$, перестановочной с A, получаем $x_{21}=x_{41}=x_{43}=0$, $x_{23}=1$. Можно считать, что $\operatorname{rank}(B-E)^2\le 1$, иначе этот случай сводится к уже доказанным случаям а) и б), потому что у матрицы B нормальная форма $\begin{pmatrix}Y_4 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ или Y_5. Поэтому $\det\begin{pmatrix}x_{31} & x_{22}+x_{33}-2 \\ 0 & x_{42}\end{pmatrix}=0$. Итак, $x_{31}x_{42}=0$.

Из равенств $\operatorname{tr} HB^2=0$ и $x_{21}=x_{41}=x_{43}=x_{53}=x_{51}=x_{54}=0$ имеем $x_{31}+x_{42}=0$. Поэтому $x_{31}=x_{42}=0$. Итак, B – клеточно-треугольная матрица и $\rho(F_2)$ – приводимая подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$. Теперь снова можно воспользоваться леммой 3.

Рассмотрим теперь случай $x_{51}\neq 0$, $x_{23}=0$. Тогда система (4) приводится к виду

$$\begin{cases} x_{21}+x_{43}+x_{54}=0, \\ x_{21}^2+x_{43}^2+x_{54}^2+2x_{51}x_{24}=0, \\ x_{21}^3+x_{43}^3+x_{54}^3+3x_{51}x_{24}x_{21}+3x_{54}x_{51}x_{24}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) получаем, что $x_{43}=x_{51}x_{24}-x_{54}x_{21}=0$. Из $\operatorname{tr} HB^2=0$ получаем $x_{13}=0$. Так как $x_{13}=x_{23}=x_{43}=x_{53}=0$, то, сопрягая A и B матрицей $T=\operatorname{diag}(T_1,E_2)$, где $T_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, получаем $A=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$ – клеточно-треугольные матрицы, т. е. $\rho(F_2)$ – приводимая подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$.

Осталось рассмотреть случай $x_{51}=0,\ x_{23}=0.$ Тогда система (4) приводится к виду

$$\begin{cases} x_{21}+x_{43}+x_{54}=0, \\ x_{21}^2+x_{43}^2+x_{54}^2=0, \\ x_{21}^3+x_{43}^3+x_{54}^3=0. \end{cases}$$

Поэтому $x_{21}=x_{43}=x_{54}=0.$ Если $x_{41}\neq 0,$ то матрица $D=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{23} \\ x_{41} & x_{43}\end{pmatrix}$ сопряжением приводится к виду $\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_{21} & x_{23} \\ x_{41} & x_{43}\end{pmatrix}P$ и этот случай уже разобран выше. Если $x_{41}=0,$ то, сопрягая A и B подходящей матрицей $T=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2\end{pmatrix}$, получаем $A=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$. Таким образом, $\rho(F_2)$ снова приводимая подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$ и мы можем применить лемму 3.

г) Пусть $A=\begin{pmatrix}Y_3 & 0 \\ 0 & E_2\end{pmatrix}$, $B=(x_{ij})$. Положим $H=A-E.$ Тогда $H=\begin{pmatrix}0 & E_3 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, и $H^3=0.$ Поскольку случаи а) – в) уже разобраны, можем считать, что $\operatorname{rank}(B-E)\leq 2.$

Как и выше, получаем $\operatorname{tr}HB=\operatorname{tr}H^2B=\operatorname{tr}(HB)^2,$ откуда имеем $x_{31}=x_{21}+x_{32}=x_{21}^2+x_{32}^2=0.$ Поэтому $x_{31}=x_{21}=x_{32}=0.$

Если $x_{41}=x_{51}=0,$ то A и B – клеточно-треугольные матрицы и $\rho(F_2)$ – приводимая подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$ и мы применяем лемму 3. В противном случае можно доказать, что $x_{25}=x_{35}=0,$ используя то, что $\operatorname{rank}(B-E)^2\leq 1$ (аналогично случаю в)). Теперь сопряжем A и B подходящей матрицей $T=\begin{pmatrix}E_3 & 0 \\ 0 & P\end{pmatrix}$, перестановочной с $A.$ Получим $x_{41}=0,\ x_{51}=1.$ Затем сопряжем A и B подходящей матрицей $T_1=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & a_6\end{pmatrix}$. Получаем $A=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$. Таким образом, $\rho(F_2)$ снова приводимая подгруппа в $GL(5,C)$.

д) Пусть $A=\begin{pmatrix}Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}Y_2 & 0 \\ 0 & E_3\end{pmatrix}$, $A=E+H.$ Тогда $H^2=0.$ Сразу будем считать из доказательства случаев а) – г), что $B=E+T$ и $T^2=0.$ Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 4. *Для любого элемента* $R\in F_2$ *элемент* $R(A,B)$ *унипотентен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\operatorname{tr}H=\operatorname{tr}T=0.$ Из равенства $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}B$ имеем $\operatorname{tr}HT=0,$ а из $\operatorname{tr}(AB)^2=\operatorname{tr}AB$ получаем $\operatorname{tr}(HT)^2=0.$ Используя по индукции равенства $\operatorname{tr}(AB)^s=\operatorname{tr}AB,$ получаем $\operatorname{tr}(HT)^s=0.$ Аналогично $\operatorname{tr}(TH)^s=0.$

Покажем, что для любой матрицы $C = R(A,B) \in \rho(F_2)$, $C \neq E$, имеем $\operatorname{tr} C = 5$. Заметим, что $A^{-1} = E - H$, $B^{-1} = E - T$. Тогда $C = E + w(H,T)$, где $w(H,T)$ – слово от матриц H,T с положительными показателями. Так как $H^2 = 0$ и $T^2 = 0$, то $w(H,T)$ имеет вид либо $HT\cdots TH$, либо $TH\cdots HT$, либо $(HT)^s$, либо $(TH)^s$. Поскольку

$$\operatorname{tr}(HT\cdots TH) = \operatorname{tr}(H^2T\cdots T) = 0,\ \operatorname{tr}(TH\cdots HT) = \operatorname{tr}(T^2H\cdots H) = 0,$$

то $\operatorname{tr} C = 5$. Так как это равенство справедливо для любой матрицы C, то $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} C^2 = \operatorname{tr} C^3 = \operatorname{tr} C^4 = \operatorname{tr} C^5 = 5$. Отсюда следует, что C – унипотентная матрица. Лемма доказана.

Поскольку все элементы группы $\rho(F_2)$ унипотентны, то по теореме Мальцева $\rho(F_2)$ – унитреугольная подгруппа в $GL(5,\mathbb{C})$. Доказательство теоремы 1 завершено.

Отметим, что лемма 4 справедлива для матриц произвольной степени. Из этого следует следующая

Теорема 2. *Образ* $F_2(x,y)$ *относительно представления* $\rho: F_2(x,y) \to GL(n,\mathbb{C})$ – *унипотентная подгруппа в* $GL(n,\mathbb{C})$ *при условиях*: 1) *отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы;* 2) $(\rho(x)-E)^2 = (\rho(y)-E)^2 = 0$.

Авторы благодарны В.В. Беняш-Кривцу за помощь в доказательстве теоремы 2.

1. Матейко О.М., Тавгень О.И. // Мат. заметки. 2006. Т. 67. Вып. 6. С. 922.
2. Самсонов Ю.Б., Тавгень О.И. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 6.
3. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений. М., 1974.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М., 1975.

Поступила в редакцию 09.06.09.

Олег Игнатьевич Тавгень – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры.
Ян Синьсун – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – О.И. Тавгень.