

УДК 512.543

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, Я.А. ЖУКОВЕЦ

СВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ В ОБОБЩЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА (3, 3, 2)

It is proved that generalized triangle groups with presentation $G = \langle a, b; a^3 = b^3 = R^2(a, b) = 1 \rangle$, where the word $R(a, b)$ has syllable length less or equal to 13, contain a non-abelian free subgroup. In particular, the Tits alternative holds for such groups.

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенной треугольной группой типа (k, l, m) называется группа с копредставлением вида $\Gamma = \langle a, b | a^k = b^l = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $k, l, m \geq 2$ и $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $0 < k_i < k$, $0 < l_i < l$. При этом слово $R(a, b)$ не является собственной степенью. Розенбергер [1] выдвинул предположение, что каждая обобщенная треугольная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для групп всех типов, за исключением $(2, n, 2)$, где $n \leq 5$, $(3, 3, 2)$ и $(3, 5, 2)$. Мы рассматриваем группы типа $(3, 3, 2)$. В работе будет доказана следующая

Теорема. *Обобщенная треугольная группа $\Gamma = \langle a, b | a^3 = b^3 = R^2(a, b) = 1 \rangle$, где $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i, l_i \leq 2$, $5 \leq s \leq 13$, содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Известно, что если $s \leq 4$, то группа Γ удовлетворяет альтернативе Титса [2]. Поэтому мы рассмотрим случай, когда $5 \leq s < 14$. Ниже мы будем обозначать через E – единичную матрицу в $SL_2(\mathbb{C})$, через $[A]$ – образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ – след матрицы A . Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неприводимой, если ее прообраз $\bar{H}$ в $SL_2(\mathbb{C})$ – неприводимая подгруппа в обычном смысле. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами – $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой

диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\text{tr } A$, $\text{tr } B$, $\text{tr } AB$ равны нулю. Далее, конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются циклические группы, группы диэдра D_n , а также A_4, S_4, A_5 . Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $\text{tr } X = 2 \cos \frac{\pi u}{n}$, где $(u, n) = 1$. Гомоморфизм $\rho: \Gamma \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов $x, y, R(x, y)$ имеют порядки k, l, m соответственно. Группу Γ будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma)$ конечен для любого существенного представления ρ .

Лемма 1. Если существует сюръективный гомоморфизм групп $f: G \rightarrow H$, где H содержит свободную подгруппу ранга 2, то группа G также содержит свободную подгруппу ранга 2.

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Тогда $\rho(G)$, а следовательно, по лемме 1 и G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Для произвольного элемента $w \in F_3$, где F_3 – свободная группа с базисом g_1, g_2, g_3 , рассмотрим следующую функцию:

$$\tau_w: SL_2(\mathbb{C})^3 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_w(A, B, C) = \text{tr } w(A, B, C).$$

Функцию τ_w обычно называют характером Фрике. Справедливы следующие соотношения между характеристиками Фрике:

$$\tau_{w^{-1}} = \tau_w, \quad \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{u^{-1}v}.$$

Обозначим $x_i = \tau_{g_i}$, $y_{ij} = \tau_{g_i g_j}$, $z_{ijk} = \tau_{g_i g_j g_k}$. В [4] доказано, что

$$\tau_w = A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) + B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) z_{123},$$

где $A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23})$, $B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23})$ – многочлены от переменных $x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}$.

Пусть

$$P = x_1 y_{23} + x_2 y_{13} + x_3 y_{12} - x_1 x_2 x_3, \quad (1)$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{23}^2 + y_{12} y_{13} y_{23} - x_1 x_2 y_{12} - x_1 x_3 y_{13} - x_2 x_3 y_{23} - 4. \quad (2)$$

Тогда z_{123} и z_{132} – корни квадратного уравнения

$$z^2 - Pz + Q = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим подробнее случай свободной группы $F_2 = \langle g, h \rangle$ с двумя образующими. В [6] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_r} h^{v_r}$ – циклически редуцированное слово в F_2 и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x, y, z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w .

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\text{tr } A)^2 + (\text{tr } B)^2 + (\text{tr } AB)^2 - \text{tr } A \text{tr } B \text{tr } AB - 4 = 0. \quad (4)$$

Лемма 2. 1) Для любой тройки значений $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ существует пара матриц $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ таких, что $\text{tr } A_0 = x_0$, $\text{tr } B_0 = y_0$, $\text{tr } A_0 B_0 = z_0$; 2) для произвольных чисел $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123} \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих (3), существуют матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A = a_1$, $\text{tr } B = a_2$, $\text{tr } C = a_3$, $\text{tr } AB = a_{12}$, $\text{tr } AC = a_{13}$, $\text{tr } BC = a_{23}$, $\text{tr } ABC = a_{123}$.

Пусть Γ – группа из теоремы и пусть $Q_R(x, y, z)$ – многочлен Фрике элемента R . Положим

$$g(z) = Q_R(1, 1, z). \quad (5)$$

Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 2 существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A = \text{tr } B = 1$, $\text{tr } AB = z_0$ и $\text{tr } R(AB) = 0$. Тогда $[A]^3 = [B]^3 = R^2([A], [B]) = 1$ и отображение $a \rightarrow [A]$, $b \rightarrow [B]$ задает представление группы Γ . Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Если $z_0 \neq -1, 2$, то

из (4) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима. В этом случае $G(z_0)$ с точностью до сопряжения определена однозначно.

Лемма 3. Многочлен $g(z)$, определенный в (5), не имеет корней, равных -1 и 2 .

Доказательство. Пусть $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$ и предположим, что $z_0 = -1$ – корень $g(z)$. Тогда $g(z) = (z+1)g_1(z)$. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ t & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Тогда $\text{tr } A = \text{tr } B = 1$, $\text{tr } AB = t - 1$. В этом случае свободный член полинома $\text{tr } R(A, B)$ равен $2 \cos \frac{K+L}{3} \pi \neq 0$, где $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$. С другой стороны, $\text{tr } R(A, B) = g(t-1) = tg_1(t-1)$ – противоречие. Случай $z_0 = 2$ разбирается аналогично.

Лемма 4. Если многочлен $g(z)$ имеет корень, отличный от $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, то группа Γ не является псевдоконечной.

Доказательство. Пусть z_0 – корень $g(z)$. По лемме 3 $z_0 \neq -1, 2$, поэтому в силу (4) группа $G(z_0)$ неприводима. Из [6] следует, что группа $G(z_0)$ бесконечна.

Лемма 5. Если группа Γ не является псевдоконечной, то она содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Рассмотрим существенное представление $\rho: \Gamma \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, при котором образ $\rho(\Gamma)$ бесконечный. Группа $\rho(\Gamma)$ не является группой диэдра, так как в ней присутствуют элементы порядка 3, и неприводима в силу леммы 3. Таким образом, $\rho(\Gamma)$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и она содержит свободную подгруппу ранга 2. Тогда Γ также содержит неабелеву свободную подгруппу.

Лемма 6. Если группа Γ псевдоконечна, то многочлен $g(z)$ имеет следующий вид: 1) если s – нечетно, тогда $g(z) = z(z^2 - z - 1)^{(s-1)/2}$ или $g(z) = (z-1)(z^2 - z - 1)^{(s-1)/2}$; 2) если s – четно, тогда $g(z) = z(z-1)(z^2 - z - 1)^{(s-2)/2}$ или $g(z) = (z^2 - z - 1)^{s/2}$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что

$$g(z) = z^{a_1} (z-1)^{a_2} \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a_3} \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a_4},$$

где $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s$. Будем использовать обозначения из доказательства леммы 3. Тогда $\text{tr } R(A, B) = g(t-1)$ и, сравнивая свободные коэффициенты в левой и правой части последнего равенства, получаем

$$(-1)^s 2^{a_2} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{a_3} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{a_4} = 2 \cos \frac{K+L}{6} \pi,$$

откуда следует $a_3 = a_4$ и $(-1)^s 2^{a_2} = 2 \cos \frac{K+L}{6} \pi$, т. е. $a_2 \leq 1$. Заменяя матрицу B на матрицу

$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix}$, получим $\text{tr } R(A, B_1) = g(t+2)$. После сравнения свободных коэффициентов получим

$2^{a_1} = 2 \cos \frac{K-L}{6} \pi$, т. е. $a_1 \leq 1$. В случае нечетного s имеем $a_1 + a_2$ нечетно и у нас есть две возможности: $a_1 = 1, a_2 = 0$ или $a_1 = 0, a_2 = 1$. Если же s четно, то $a_1 + a_2$ четно и либо $a_1 = a_2 = 0$, либо $a_1 = a_2 = 1$. Лемма доказана.

С использованием леммы 6 и с помощью программы Maple для $5 \leq s < 14$ найдены с точностью до изоморфизма все возможные псевдоконечные группы типа $(3, 3, 2)$. Они имеют вид

$$\Gamma_1 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ababa^2 b^2 a^2 b)^2 = 1 \rangle (s=5),$$

$$\Gamma_2 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ab^2 a^2 ba^2 b^2 a^2 b^2 ab)^2 = 1 \rangle (s=6),$$

$$\Gamma_3 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 aba^2 b^2 a^2 bababa^2 b^2)^2 = 1 \rangle (s=7),$$

$$\Gamma_4 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ababa^2 b^2 a^2 bab^2 a^2 ba^2 b^2)^2 = 1 \rangle (s=8),$$

$$\Gamma_5 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 abab^2 a^2 ba^2 bab^2 a^2 b^2 a^2 b)^2 = 1 \rangle (s=8),$$

$$\Gamma_6 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 abab^2 a^2 b^2 a^2 bab^2 a^2 ba^2 b)^2 = 1 \rangle (s=8),$$

$$\Gamma_7 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ababa^2 b^2 a^2 b^2 aba^2 ba^2 b^2 ab)^2 = 1 \rangle (s=9),$$

$$\Gamma_8 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ababa^2 b^2 ab^2 a^2 baba^2 b^2 a^2 ba^2 b^2)^2 = 1 \rangle (s=10),$$

$$\Gamma_9 = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 a^2 b^2 a^2 ba^2 bab^2 a^2 b^2 aba^2 bab^2 ab)^2 = 1 \rangle (s=10),$$

$$\Gamma_{10} = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab^2 ababa^2 b^2 a^2 b^2 ab^2 aba^2 b^2 a^2 baba^2 b)^2 = 1 \rangle (s=11).$$

При $s=12$ и $s=13$ псевдоконечных групп типа $(3, 3, 2)$ не существует. Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 7. Группы $\Gamma_1 - \Gamma_{10}$ содержат неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Разобьем доказательство на два случая: 1) s – нечетное; 2) s – четное.

1 случай. Рассмотрим циклическую группу $C_3 = \langle c | c^3 = 1 \rangle$ и сюръективный гомоморфизм:

$\varphi: \Gamma \rightarrow C_3: a \mapsto c, b \mapsto c^2$. Пусть $T = \text{Ker } \varphi$. Наша цель – построить гомоморфизм $\rho: T \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Найдем копредставление группы T , используя переписывающий процесс Рейдемейстера – Шрейера.

$$\text{Если } s=5, \text{ то } T = \langle x, y | (y^2 x^3 yx)^2 = (x^{-1} y^2 x^{-2} y^{-1})^2 = (x^{-1} y^2 x y x y)^2 = 1 \rangle.$$

Пусть $\tau_x = a, \tau_y = b, \tau_{xy} = c$. Рассмотрим полиномы Фрике элементов $y^2 x^3 yx, x^{-1} y^2 x^{-2} y^{-1}, x^{-1} y^2 x y x y$ и приравняем их к нулю. Получим систему

$$f_1(a, b, c) = f_2(a, b, c) = f_3(a, b, c) = 0, \quad (6)$$

где $f_1(a, b, c) = -a^3 c + a^2 b c^2 - ab^2 c + 2ac - bc^2 + b$, а $f_2(a, b, c) = f_1(b, c, a); f_3(a, b, c) = f_1(c, a, b)$.

Лемма 8. Предположим, что базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ содержит полином, который делится на неприводимый над $\mathbb{Z}$ полином $f_4(c)$ степени больше 2, базис Гребнера идеала $I_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ отличен от $\{1\}$ и что базис Гребнера идеала $I_2 = (f_1, f_2, f_3, h)$ равен $\{1\}$, где $h(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - abc - 4$. Тогда группа T (а поэтому и исследуемая группа Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство леммы 8. По условию леммы система (6) имеет такое решение (a_0, b_0, c_0) , что $f_4(c_0) = 0$. В силу леммы 2 существуют матрицы X, Y такие, что $\text{tr } X = a_0, \text{tr } Y = b_0, \text{tr } XY = c_0$. Пусть $H = \langle [X], [Y] \rangle$. По построению отображение $\rho_1: T \rightarrow H, x \mapsto X, y \mapsto Y$ – гомоморфизм и в силу (4) группа H неприводима. Покажем, что группа H бесконечна. В противном случае c_0 принадлежало бы множеству $\{\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\}$ или, что равносильно, являлось бы корнем полинома

$f_5(c) = c(c^2 - c - 1)(c^2 + c - 1)(c^2 - 2)(c^2 - 1) = 0$. Но так как $f_4(c)$ и $f_5(c)$ взаимно просты, то $f_5(c_0) \neq 0$. Значит, группа H является бесконечной. Легко видеть, что $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Следовательно, H – не группа диэдра. Таким образом, группа H – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда и группа T (а также группа Γ) содержит ее. Лемма 8 доказана.

Вернемся к доказательству леммы 7. Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ содержит такой полином, который делится на неприводимый полином $f_4(c) = c^{12} - 3c^{10} - 9c^8 + 42c^6 - 48c^4 + 15c^2 + 1$. При этом базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ отличен от $\{1\}$, а базис Гребнера идеала $I_2 = (f_1, f_2, f_3, h)$ равен $\{1\}$. По лемме 8 группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Пусть $s = 7$. Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y \mid (yx^2 y x y^3 x^{-1})^2 = (y^2 x y x y x^2 y^{-1} x)^2 = (y^{-1} x^{-1} y^{-2} x^3 y x)^2 = 1 \rangle.$$

В этом случае в системе (6)

$$f_1 = (a - ab^2)c^3 + (a^2b^3 - a^2b + b^3 - b)c^2 + (a^3 - a^3b^2 - ab^4 + 3ab^2 - 3a)c + a^2b - b = 0.$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ содержит такой полином, который делится на неприводимый полином

$$f_4(c) = c^{48} - 34c^{46} + 541c^{44} - 5364c^{42} + 37167c^{40} - 191154c^{38} + 756274c^{36} - 2353719c^{34} + \\ + 5844273c^{32} - 11674875c^{30} + 18839391c^{28} - 24564186c^{26} + 25796490c^{24} - 21670854c^{22} + \\ + 14406744c^{20} - 7464384c^{18} + 2953425c^{16} - 870291c^{14} + 186475c^{12} - 29440c^{10} + 4147c^8 - \\ - 753c^6 + 144c^4 - 18c^2 + 1.$$

При этом базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ отличен от $\{1\}$, а базис Гребнера идеала $I_2 = (f_1, f_2, f_3, h)$ равен $\{1\}$. По лемме 8 группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Пусть $s = 9$. Тогда

$$T = \langle x, y \mid (yx^3 y x y x^2 y x^{-1} y)^2 = (yx y^2 x y^{-1} x^2 y^{-2} x)^2 = (x^{-2} y^{-1} x^{-1} y x y^3 x y x y)^2 = 1 \rangle.$$

В этом случае в системе (6)

$$f_1 = (-ba^3 + ab)c^4 + (b^2a^4 + b^2a^2 - a^2 - b^2)c^3 + (-2ba + 5a^3b - 2a^3b^3 - ba^5)c^2 + \\ + (-3a^2b^2 + a^2b^4 + b^2 + a^2 + 1)c + 4ab + a^3b^3 - 5ba^3 + ba^5 - ab^3.$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ содержит такой полином, который делится на неприводимый полином $f_4(c)$ степени 108. При этом базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ отличен от $\{1\}$, а базис Гребнера идеала $I_2 = (f_1, f_2, f_3, h)$ равен $\{1\}$. По лемме 8 группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Пусть $s = 11$. Тогда

$$T = \langle x, y \mid (yx^3 y x y x y^{-1} x^{-1} y^{-2} x^2 y)^2 = (x^{-1} y^2 x^{-2} y x^2 y x y^2 x^{-1} y^{-1})^2 = (x^{-1} y x y x^2 y^{-1} x y^3 x y x y)^2 = 1 \rangle.$$

В этом случае в системе (6)

$$f_1 = (-a^3b^2 + ab^2)c^5 + (a^4b^3 + a^4b - 2a^2b)c^4 + (-2a^5b^2 - 2a^3b^4 + 7a^3b^2 - a^3 + ab^4 - \\ - 5ab^2 + 2a)c^3 + (a^6b + 2a^4b^3 - 6a^4b + a^2b^5 - 5a^2b^3 + 8a^2b)c^2 + (a^5b^2 - 4a^3b^2 + \\ + 2a^3 - ab^4 + 6ab^2 - 5a)c - a^6b - a^4b^3 + 5a^4b + 2a^2b^3 - 5a^2b - b.$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ содержит такой полином, который делится на неприводимый полином $f_4(c)$ степени 156. При этом базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ отличен от $\{1\}$, а базис Гребнера идеала $I_2 = (f_1, f_2, f_3, h)$ равен $\{1\}$. По лемме 8 группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.

2 случай. Рассмотрим циклическую группу $C_3 = \langle c \mid c^3 = 1 \rangle$ и сюръективный гомоморфизм:

$\varphi: \Gamma \rightarrow C_3: a \mapsto c, b \mapsto 1$. Пусть $T = \text{Ker } \varphi$. Наша цель – построить гомоморфизм $\rho: T \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Найдем копредставление группы T , используя переписывающий процесс Рейдемейстера – Шрейера.

Пусть $s = 6$. Тогда

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (xy^2 z^2 y x^2 z^2)^2 = (yz^2 x^2 zy^2 x^2)^2 = (zx^2 y^2 xz^2 y^2)^2 = 1 \rangle.$$

Положим $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 1$, $\tau_{xy} = y_{12}$, $\tau_{xz} = y_{13}$, $\tau_{yz} = y_{23}$, $\tau_{xyz} = z_1$, $\tau_{xzy} = z_2$. Из равенств (1) – (3) следует,

что

$$\begin{aligned} g_1 &= z_1 + z_2 - y_{12} - y_{13} - y_{23} + 1 = 0, \\ g_2 &= z_1 z_2 - y_{12}^2 - y_{13}^2 - y_{23}^2 - y_{12} y_{13} y_{23} + y_{12} + y_{13} + y_{23} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим полиномы Фрике элементов $xy^2z^2yx^2z^2$, $yz^2x^2zy^2x^2$, $zx^2y^2xz^2y^2$ и приравняем их к нулю. Получим систему уравнений

$$f_1(z_1, z_2, y_{12}, y_{23}, y_{13}) = f_2(z_1, z_2, y_{12}, y_{23}, y_{13}) = f_3(z_1, z_2, y_{12}, y_{23}, y_{13}) = 0, \quad (7)$$

где $f_1 = (z_1 - y_{12} - y_{23} + 1)(z_1 - y_{12} - y_{13} + 1) - (y_{12} - 1) + 2$ и $f_2 = f_1(z_1, z_2, y_{23}, y_{13}, y_{12})$, $f_3 = f_1(z_1, z_2, y_{13}, y_{12}, y_{23})$.

Лемма 9. *Предположим, что базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23})$ степени больше 2, и что базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, f_4)$ отличен от $\{1\}$. Тогда группа T (а поэтому и исследуемая группа Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. По условию леммы система (7) имеет такое решение $(y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0, z_1^0, z_2^0)$, что $f_4(y_{23}^0) = 0$. Для данного решения $(y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0, z_1^0, z_2^0)$ в силу леммы 2 существуют матрицы X, Y, Z такие, что $\text{tr } X = \text{tr } Y = \text{tr } Z = 1$, $\text{tr } XY = y_{12}^0$, $\text{tr } XZ = y_{13}^0$, $\text{tr } YZ = y_{23}^0$, $\text{tr } XYZ = z_1^0$, $\text{tr } XZY = z_2^0$. Пусть $H = \langle [X], [Y], [Z] \rangle$. По построению отображение $\rho: T \rightarrow H: x \mapsto [X], y \mapsto [Y], z \mapsto [Z]$ задает гомоморфизм группы T . Рассмотрим теперь подгруппу $G = \langle [Y], [Z] \rangle$ в H . Покажем, что группа G неприводима. Для этого в силу (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f_5(y_{23}^0) \neq 0$, где $f_5(y_{23}) = y_{23}^2 - y_{23} - 2$, т. е. $y_{23}^0 \neq -1, 2$. Очевидно, что это условие выполнено в силу неприводимости f_4 . Если группа G конечна, то y_{23}^0 принадлежит множеству $\{\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\}$ или, что равносильно, является корнем полинома $f_6(y_{23}) = y_{23}(y_{23}^2 - y_{23} - 1)(y_{23}^2 + y_{23} - 1)(y_{23}^2 - 2)(y_{23}^2 - 1)$. Однако f_4 и f_5 взаимно просты в силу неприводимости f_4 , откуда следует, что группа G является бесконечной. Наконец, легко видеть, что G – не группа диэдра. Таким образом, G – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда группа H (а поэтому и группы T и Γ_2) также содержит такую подгруппу. Лемма 9 доказана.

Вернемся к доказательству леммы 7. Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23}) = y_{23}^3 - 3y_{23}^2 + y_{23} - 2$, и базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, f_4)$ отличен от $\{1\}$. По лемме 9 группа Γ_2 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Пусть $s = 8$. Рассмотрим группу Γ_4 . Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (y^2zxz^2yz^2yx^2)^2 = (z^2xyx^2zx^2zy^2)^2 = (x^2yz^2xy^2xz^2)^2 = 1 \rangle.$$

В системе (7) многочлен f_1 имеет вид

$$f_1 = (y_{23} - 1)(y_{13}y_{12}y_{23} - y_{12}y_{23} - y_{13}y_{12} + y_{12} + y_{12}z_2 - y_{13}y_{23} + 2y_{23} + y_{13} + z_1y_{13} - z_1 - z_2 - 1).$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23}) = y_{23}^4 - 4y_{23}^3 + 5y_{23}^2 - 2y_{23} + 1$. По лемме 9 группа Γ_4 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_5 . Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (y^2zx^2zyz^2y^2x)^2 = (z^2xy^2xzx^2z^2y)^2 = (x^2yz^2xy^2x^2z)^2 = 1 \rangle.$$

В системе (7) многочлен f_1 имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 &= y_{12}y_{23}^2y_{13} - y_{13}y_{12}y_{23} - y_{12}y_{23}^2 + y_{12}^2y_{23} + y_{12}y_{13} - y_{12}z_1 - y_{13}y_{23}^2 - y_{13}y_{23} + y_{23}^2 - y_{23} + \\ &\quad + y_{13} + y_{23}y_{13}^2 - y_{13}^2 + z_1y_{13}. \end{aligned}$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23}) = 9y_{23}^4 - 24y_{23}^3 + 10y_{23}^2 + 8y_{23} - 4$. По лемме 9 группа Γ_5 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_6 . Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (y^2zx^2z^2yz^2yx)^2 = (z^2xy^2x^2zx^2zy)^2 = (x^2yz^2y^2xy^2xz)^2 = 1 \rangle.$$

В системе (7) многочлен f_1 имеет вид

$$f_1 = (y_{23} - 1)(y_{12}y_{23}y_{13} - y_{13}z_2 + y_{13}^2 - y_{12}y_{23} - y_{13} + z_2y_{12} + y_{23}).$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23}) = y_{23}^4 - 4y_{23}^3 + 5y_{23}^2 - 2y_{23} + 1$. По лемме 9 группа Γ_6 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Пусть $s = 10$. Рассмотрим группу Γ_8 . Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (y^2zxz^2x^2zx^2yx)^2 = (z^2xyx^2y^2xyx^2zy)^2 = (x^2yzy^2z^2yzy^2xz)^2 = 1 \rangle.$$

В системе (8) многочлен f_1 имеет вид

$$f_1 = (y_{13}^2 - y_{13})((y_{12}y_{23} - y_{12} - y_{23} + 1 + z_1)(y_{13} - 1) + z_2y_{12} + y_{23} - 1 - z_2) + y_{12}^2 - y_{12}.$$

Базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23})$ степени 114. По лемме 9 группа Γ_8 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу Γ_9 . Группа T имеет копредставление

$$T = \langle x, y, z \mid x^3 = z^3 = y^3 = (y^2x^2zyz^2y^2zyz^2x)^2 = (z^2y^2xzx^2z^2xzx^2y)^2 = (x^2z^2yxy^2x^2yxy^2z)^2 = 1 \rangle.$$

В системе (7) многочлен f_1 имеет вид

$$f_1 = (y_{23}^2 - y_{23})(y_{23}(y_{12}y_{13} - y_{12} + z_2 - y_{13}) + y_{12}(z_1 - y_{13}) - 1 + y_{13}) + y_{12}^2 - y_{12}.$$

Вычисления показывают, что базис Гребнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ содержит полином, который делится на неприводимый полином $f_4(y_{23})$ степени 114. По лемме 9 группа Γ_9 содержит неабелеву свободную подгруппу. Лемма 7 доказана.

1. Rosenberger G. // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 2. С. 227.

2. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, 1999.

3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.

4. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.

5. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.

6. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. № 311. P. 564.

Поступила в редакцию 09.06.09.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры.

Янина Александровна Жуковец – преподаватель-стажер кафедры алгебры и геометрии БГПУ им. М. Танка.