

производные, после преобразования получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \left(F_{\zeta,z} - S_y \xi_{,zz} - S_x \eta_{,zz} - S_{\omega} \theta_{,zz} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} q_{,z} \\ & \left(-S_y \zeta_{,z} + I_y \xi_{,zz} + I_{xy} \eta_{,zz} + I_{\omega} \theta_{,zz} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} \left(q_{,z} + \int_{L(7)} P_{,z} ds \right) \\ & \left(-S_x \zeta_{,z} + I_{xy} \xi_{,zz} + I_x \eta_{,zz} + I_{\omega} \theta_{,zz} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} \left(q_{,z} + \int_{L(7)} P_{,z} y ds \right) \\ & \left(-S_{\omega} \zeta_{,z} + I_{\omega x} \xi_{,zz} + I_{\omega y} \eta_{,zz} + I_{\omega} \theta_{,zz} \right)_{,zz} - \left(\frac{G}{E} I \theta_{,z} \right)_{,z} = \frac{1}{E} \left(m + \int_{L(z)} P_{,z} \Phi \cdot ds \right). \end{aligned}$$

Эту систему уравнений, введением переменных

$$\zeta_{,z} = \bar{\zeta}, \quad \xi_{,zz} = \bar{\xi}, \quad \eta_{,zz} = \bar{\eta}, \quad \theta_{,zz} = \bar{\theta},$$

можно приведем к матричному уравнению второго порядка с матричным инвариантом восьмого порядка. В конкретных задачах порядок инварианта может быть меньшим. Например, в рассматриваемой задаче поперечного изгиба для разрешающей системы уравнений порядок инварианта будет равен пяти. Для однородных матричных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в виде многочленов автором получено аналитическое решение [2]

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \text{Co}(In, z) + C_2 \text{Si}(In, z) + \begin{pmatrix} y_{1q} \\ \dots \\ y_{nq} \end{pmatrix}.$$

Здесь n – порядок матричного инварианта $In(z)$. В докладе приведены примеры решения новых конкретных задач.

Литература

1. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни* // М.: Физматгиз – 1959.
2. Косых Э. Г. *Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости* // Вестник СамГУ – Естественная серия, 2008, № 8/1(67).

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ ВИНКЛЕРА

Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта
Кирова, 34, 246653 Гомель, Республика Беларусь

leoden@tut.by

Введение. Изучение собственных колебаний конструкции является одной из важных задач динамики, так как позволяет определить собственные частоты и формы, что в свою очередь служит базисом для анализа поведения

конструкции при динамических воздействиях.

В работе [1] исследовано статическое и динамическое поведение однородных оболочек, лежащих на упругом основании. Работа [2] посвящена деформированию трехслойных стержней, пластин и оболочек, не связанных с упругой средой. В монографии [3] решены задачи о собственных колебаниях трехслойных пластин и стержней, связанных с упругим основанием Винклера. Здесь рассматриваются собственные колебания трехслойной круговой цилиндрической оболочки в среде Винклера.

Постановка задачи. В тонких изотропных несущих слоях толщиной h_k справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява, в относительно толстом жестком заполнителе ($h_3 = 2c$) справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией зависимости перемещений точек от поперечной координаты. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. За искомые функции принимаем u_α^k , w^k – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев в направлении осей x_α , отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали, соответственно. На наружные поверхности несущих слоев действует реакция упругой среды $q_{\alpha r}^k$. Деформации малые.

Уравнения колебаний трехслойной оболочки и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа, с учетом вариации работы сил инерции:

$$\delta A_q - \delta W = \delta A_I, \quad (1)$$

где $\delta A_q = \delta A_{q1} + \delta A_{q2}$ – вариация работы внешних сил δA_{q1} и контурных усилий δA_{q2} ; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции.

Внешняя упругая среда описывается моделью Винклера $q_{3r}^k = -\kappa^k w^k$, $q_{1r}^k = 0$, $q_{2r}^k = 0$.

Решение задачи. Уравнения движения для исследования свободных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде получим из (1), выразив вариации работ через искомые перемещения. В результате имеем систему шести дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left(a_{m\alpha 1}^k u_{\alpha, \alpha\alpha}^k + a_{m\alpha 2}^k u_{\alpha, \beta\beta}^k + a_{m\alpha 3}^k u_{\alpha}^k + a_{m\alpha 4}^k u_{\beta, \alpha\beta}^k + \right. \\ & \left. + a_{m\alpha 5}^k w_{, \alpha}^k + a_{m\alpha 6}^k w_{, \alpha\alpha\alpha}^k + a_{m\alpha 7}^k w_{, \alpha\beta\beta}^k \right) - b_{\alpha}^m \ddot{u}_{\alpha}^m = 0, \\ & \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left(a_{m31}^{\gamma k} w_{, \gamma\gamma\gamma}^k + a_{m32}^k w_{, 1122}^k + a_{m33}^{\gamma k} w_{, \gamma\gamma}^k + \left(a_{m34}^k - R m_m \kappa^k \delta_{mk} \right) w^k + \right. \\ & \left. + a_{m35}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma\gamma\gamma}^k + a_{m36}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma}^k + a_{m37}^{\gamma k} u_{\gamma, \gamma\beta\beta}^k \right) - b_3^m \ddot{w}^m = 0, \quad (m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений (2) является линейной. Для по-

лучения решения воспользуемся методом Бубнова–Галеркина, который предполагает разложение искомых перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций:

$$u_{\alpha}^k = \sum_{m,n} \psi_{\alpha mn}^k(x_1, x_2) T_{\alpha mn}^k(t), \quad w^k = \sum_{m,n} \psi_{3mn}^k(x_1, x_2) T_{3mn}^k(t), \quad (3)$$

где $\psi_{lmn}^k, \psi_{qlmn}^k$ – системы базисных ортогональных функций, удовлетворяющие граничным условиям.

Предполагая, что все точки конструкции совершают колебания с одинаковой частотой, уравнения для определения функции $T_{lmn}^k(t)$ в (3) имеют вид

$$[P]\{T\} - [B]\{\ddot{T}\} = 0, \quad (4)$$

где $[P]$ – квадратная матрица шестого порядка, составленная из коэффициентов p_{ij} , зависящих от волновых параметров m и n ; $[B]$ – диагональная матрица шестого порядка с элементами B_{mnij} ; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – векторы-столбцы, сформированные из искомых функций времени $T_{lmn}^k(t)$ и их вторых производных.

Решение (4) можно принять в виде

$$T_{lmn}^k(t) = A_{lmn}^k \sin(\omega_{mn}t + \alpha_{mn}), \quad (5)$$

где A_{lmn}^k, ω_{mn} – амплитуды и частоты колебаний; α_{mn} – начальные фазы.

Подставив функцию (5) в систему уравнений (4), получим обобщенную задачу на собственные значения:

$$[P]\{A\} = -\omega^2 [B]\{A\}, \quad (6)$$

где $\{A\}$ – вектор-столбец, сформированный амплитудами A_{lmn}^k .

Сделав замену $\lambda = -\omega^2$, осуществим переход от (6) к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \lambda \{A\}, \quad [R] = [B]^{-1}[P].$$

Определив значения собственных частот ω_i^2 ($i=1, \dots, 6$), вычисляется собственный вектор A_i .

Заключение. Проведен численный анализ спектра частот собственных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки в зависимости от жесткости упругой среды и механико-геометрических параметров материалов слоев оболочки.

Литература

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. *Балки, плиты, оболочки на упругом основании*. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1960. – 491 с.
2. Старовойтов Э. И. *Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки*. Гомель: БелГУТ. – 2002. – 344 с.

3. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2011. – 560 с.

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМЫ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛАСТОМЕР

Маевская С. С.[†], Михасев Г. И.^{*}

[†] Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
210038, Беларусь, г. Витебск, Московский пр-т, 33
SvetlanaMaevskaya@yandex.ru

^{*} Белорусский государственный университет
220030, Беларусь, г. Минск, пр-т Независимости, 4
mikhasev@bsu.by

Введение. Важнейшей задачей при проектировании и эксплуатации тонкостенных инженерных конструкций типа «сэндвич», испытывающих динамические нагрузки, является задача об их виброзащите. Использование композитных магнитореологических эластомеров (МРЭ) в качестве адаптивных вязкоупругих слоев позволяет данную проблему сводить к задаче управления колебаниями. Высокая эффективность «сжатия» вибраций достигается возможностью практически мгновенного изменения реофизических свойств МРЭ и всей конструкции. В докладе, на примере трехслойной магнитореологической (МР) балки, демонстрируется возможность эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы свободных и вынужденных колебаний, а также исследуется динамическая реакция балки на внезапно приложенный сигнал магнитного поля.

Уравнение движения МР балки. В качестве исходных уравнений, описывающих движение трехслойной МР балки, приняты уравнения

$$D\eta_3 \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi = f(x, t), \quad (1)$$

которые, как частный случай, получаются из уравнений движения многослойной цилиндрической оболочки [1]. Здесь D – приведенная цилиндрическая жесткость всего пакета; $h = h_1 + h_2 + h_3$ – суммарная толщина балки; h_1, h_3 – толщины несущих упругих слоев; h_2 – толщина внутреннего вязкоупругого слоя, изготовленного из МРЭ; ρ – приведенная плотность «сэндвича»; χ – функция перемещений; w – нормальный прогиб балки; x – продольная координата; t – время; η_3, θ, β – параметры, зависящие от индукции магнитного поля и характеризующие приведенную жесткость балки (в частности параметр β характеризует жесткость балки на поперечные сдвиги). В нашем случае D, η_3, θ, β – комплекснозначные параметры, зависящие от индукции B внешнего магнитного поля [2]; если магнитное поле является нестационарным и неоднородным, то данные параметры – функции времени t и координаты x . В