Литература

1. Громыко Ю. В. *Собственные колебания кольцевой металлополимерной пластины / Динамика металлополимерных систем*. Мн.: Бел. навука, 2004. С. 253 – 267.
2. Громыко Ю. В., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. *Собственные частоты колебаний кольцевой трехслойной пластины* // Материалы X междунар. симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Ярополец, 9 – 13 февраля 2004 г. – М.: 2004. – С. 103 – 110.
3. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. *Деформирование металлополимерных систем*. – Мн.: Бел. навука, 2004. – 386 с.

ИЗГИБ УПРУГОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Гу Юй

Пекинский университет транспорта, Пекин, КНР

bjhuangzhou@yahoo.com.cn

Постановка задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень со сжимаемым заполнителем под воздействием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенных сил и моментов. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Бернулли, в жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые.

Распределенная поверхностная нагрузка $p(x), q(x)$ приложена к внешней плоскости первого слоя. Искомыми считаем прогибы и продольные перемещения несущих слоев $w_1(x), w_2(x), u_1(x), u_2(x)$.

Уравнения равновесия следуют из принципа Лагранжа

$$\delta A = \delta W , \tag{1}$$

где $\delta A, \delta W$ – вариации работы внешних сил и внутренних сил упругости.

После подстановки в (1) вариаций работ получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}
a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p, \\
-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_3 w_{1,x} - a_2 w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} = 0, \\
a_{10} u_{1,x} - a_{17} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
a_{15} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{2,xxxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q + \frac{1}{2} p_{,x} h_1, \\
-a_{18} u_{1,x} + a_{19} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
-a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \ (k = 1, 2). \tag{3}$$

Решение задачи. Решение системы дифференциальных уравнений (2) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (3):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \ u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \ w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

После подстановки перемещений (4) и нагрузки в систему (2) получим систему линейных алгебраических уравнений, решая которую любым из стандартных методов, получим коэффициенты $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ разложения в ряд искомых перемещений.

Частные случаи. В качестве примера рассматривается изгиб трехслойного стержня под действием равномерно распределенных и сосредоточенных нагрузок, приложенных к внешней плоскости первого слоя:

1. На стержень действует локальная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная до сечения $x = b \le l$. Ее можно представить в аналитическом виде с помощью функции Хевисайда $H_0(x)$.

2. На стержень действует погонная поперечная сила $Q_0 = \text{const}$, приложенная в сечении на расстоянии a от начала координат.

3. На трехслойный стержень в сечении $x = a$ действуют поперечный момент интенсивности $M_0 = \text{const}$.

Проведен численный анализ полученных решений.

БИФУРКАЦИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ

Корчевская Е. А.
УО «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»
Беларусь, г. Витебск, Московский пр., 33
Korchevskaya.Elena@tut.by

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. В качестве исходных используем уравнения, основанные на гипотезах, сформулированных Э. И. Григолюком и Г. М. Куликовым [1]:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)}\left(1 - \frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - 2T_{12}^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0, \tag{1}$$