

НАПРЯЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОКРЫТОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Конон П. Н., Жук А. В.

Белорусский государственный университет, Беларусь, 220030, пр. Независимости, 4

Рассматривается движение слоя вязкой жидкости на внутренней и внешней поверхности горизонтально вращающейся с постоянной угловой скоростью цилиндрической оболочки в поле сил поверхностного натяжения и гравитации. Движение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и свободной поверхности в цилиндрических координатах [1–3] с граничными условиями отсутствия касательных и скачком нормальных напряжений на свободной поверхности и прилипания к вращающейся границе. Представляет интерес определения [4] напряжений на поверхности цилиндра с целью наиболее точного исследования напряженного состояния вращающейся оболочки покрытой жидкостью.

В случае квазистационарного решения задачи при неучете массовых сил из уравнений Навье-Стокса получено уравнение в частных производных для определения поверхности слоя, неподвижного относительно вращающегося цилиндра

$$\frac{2}{R_s} h(\varphi, \xi) = \frac{(-1)^N}{2} We (2Eu + h^2 - 1).$$

Здесь $2/R_s$ – кривизна слоя, функция свободной поверхности $h(\varphi, \xi)$ и ее частных производных по окружной и осевой координатах φ и ξ . В уравнение входят безразмерные параметры: число Вебера $We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma$ и число Эйлера $Eu = (p_1 - p_a) / \rho \omega_0^2 R_0^2$, в которых R_0 – внутренний либо внешний радиус цилиндрической оболочки, ω_0 – постоянная угловая скорость ее вращения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости. Критерий Eu определяет безразмерную разность давлений на поверхности цилиндра p_1 и в окружающей среде p_a . Значение $N = 1$ соответствует слою на внутренней поверхности, а $N = 2$ – на внешней поверхности цилиндра. Кроме того, добавляется условие постоянства массы и периодичности решения на отрезке образующей цилиндра, а также периодичность по окружной координате.

Решение краевой задачи в нелинейной постановке представляет собой сложную математическую проблему ввиду нелинейности самого дифференциального уравнения, неизвестностью параметра Eu , фактически определяемого дополнительным условием сохранения массы, наличием неудобных граничных условий периодичности. Случай слоя на внешней поверхности закрученного цилиндра рассмотрен в [1, 2], определены условия ветвления и значения безразмерного давления на поверхности оболочки для осесимметричного и плоских равновесных слоев.

В [4] доказано, что невозможно существование волнообразных поверхностей в случае неподвижных плоских слоев жидкости относительно внутренней

поверхности вращающегося цилиндра, а давление на поверхности оболочки определяется из приведенного выше уравнения для слоя постоянной толщины.

Для осесимметричных слоев жидкости постоянной массы на внутренней поверхности вращающегося цилиндра разработан численный метод и решена нелинейная краевая задача определения форм относительного равновесия значительно отклоняющихся от слоя постоянной толщины. Показано, что ветвление решений определяется двумя бифуркационными параметрами We_n , Eu_n . Построены полные ветви бифуркационных кривых: ответвление от кривой $Eu(We)$, определяемой для случая постоянной толщины, дерева нелинейных решений, имеющих по длине образующей L ровно n максимумов свободной поверхности. Установлена неоднозначность решения: форма слоя зависит не только от физических свойств жидкости, скорости вращения и радиуса цилиндра, но и от перепада давлений в жидкости и окружающей среде. Определено значение безразмерного давления на поверхности оболочки для внутреннего осесимметричного равновесного слоя.

В [3] решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволит уточнить механизм эволюции и разрушения слоя при числах Рейнольдса $Re \gg 1$. Численным методом определено давление $Eu(\varphi)$ на внешней границе цилиндрической оболочки, имеющее сложный нелинейный вид в зависимости от угловой координаты, причем число возмущений на графике соответствует числу нелинейных возмущений слоя.

В настоящей работе исследована и решена нестационарная задача движения слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности закрученного цилиндра. Исследования при умеренных числах Рейнольдса. Показали, что основной причиной разрушения и дальнейшего перемешивания слоя является его гравитационная неустойчивость. Решение задачи позволяет определить в каждом индивидуальном случае время и параметры разрушения слоя, а также критические значения параметров $Re_{кр}$ и $We_{кр}$, выше которых слой устойчив по отношению к силе гравитации. При достаточно быстром его вращении цилиндрической оболочки при $Re \gg 1$ прямым методом получены уравнения эволюции нестационарного плоского слоя вязкой жидкости внутри вращающейся цилиндрической оболочки. Численными исследованиями комбинацией метода прямых и конечных разностей определен вид свободной поверхности слоя. При решении задачи во всех случаях определялась давление $Eu(\varphi)$ на внутренней границе вращающейся цилиндрической оболочки.

Решение гидродинамической задачи движения слоя жидкости на внутренней и внешней поверхности вращающегося цилиндра позволяет определить нормальное давление, а в нестационарной задаче и касательное напряжение на поверхности цилиндрической оболочки, а вместе с тем наиболее точно поставить граничные условия в задаче исследовании напряженного состояния вращающейся оболочки с жидкостью.

Литература

1. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О форме осесимметричного слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра* // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1989. – № 4. – С. 23 – 27.
2. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О форме жидкого слоя постоянной массы на поверхности вращающегося цилиндра* // ИФЖ. – 1990. – Т. 59, № 1. – С. 80 – 84.
3. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра* // ИФЖ. – 1994. – Т. 66, № 6. – С. 689 – 694.
4. Конон П. Н., Шпортко В. В. *Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра* // Вестник БРФФИ. – 2011, №3. – С.98 – 110.

КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

Кузин А. А., Кузин Р. А., Салман С. О., Хакимов А. Г.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова

Уфимского научного центра Российской академии наук, Россия, г. Уфа

hakimov@anrb.ru

Пусть мягкая оболочка в деформированном состоянии имеет форму замкнутой цилиндрической оболочки с радиусом R , толщиной h . Для исследования формы мягкой оболочки предполагается, что материал оболочки изотропный, толщина оболочки постоянна. Модуль упругости материала равен E , коэффициент Пуассона μ . Напряжения σ в цилиндрической оболочке подверженной внутреннему избыточному давлению P определяются по формуле

$$\sigma = \frac{PR}{h}, \quad (1)$$

Для цилиндрической оболочки имеет место следующее соотношение $2\pi R h = 2\pi R_0 h_0$, для плоской деформации и $2\pi R(1-\mu\varepsilon)h = 2\pi R_0 h_0$, при плоском напряженном состоянии. Здесь R_0 – начальный радиус оболочки, ε – относительная деформация оболочки в окружном направлении. Индекс «0» относится к параметрам недеформированного состояния. Из вышеприведенных соотношений следует $h = R_0 h_0 / R$, при плоской деформации и $h = \frac{R_0 h_0}{R(1-\mu\varepsilon)}$

при плоском напряженном состоянии. Полученные выражения подставим в выражение (1) и получим

$$\sigma = \frac{PR^2}{R_0 h_0}, \quad (2)$$

при плоской деформации и

$$\sigma = \frac{PR^2(1-\mu\varepsilon)}{R_0 h_0}, \quad (3)$$