tree stem but on the tree age, its environment, etc.) there is no straight correlation between the resistance coefficient and the geometric characteristics of the stems.

Conclusion. The method for evaluation of the resistance coefficient of a single tree crown in its motion is presented. The deformation model of the tree stem is inspired by the Cosserat theory of elastic rods. Employing finite element methods the tree stem is modeled by a chain of cylindrical elements connected by springs to describe bending deformations. The system of the Lagrange equations of motion in presence of the resistance forces is formulated. By numerically integrating these equations, the evolution of the tree stem elastic line is investigated. Based on this method, the resistance coefficients for different trees are evaluated by comparing the field experiment and model calculation results. The dynamic global behavior of real trees then are reproduced by integration of the Lagrange equations of motion.

References

1. Joung C. G., Phan-Thien N., Fan X. J. *Direct simulation of flexible fibers* // Journal of non-newtonian fluid mechanics. – 2001. – Vol. 99, № 1. – P. 1 – 36.
2. Gang Wang. *Optimization of the rod chain model to simulate the motions of a long flexible fiber in simple shear flows* // European Journal of Mechanics B. – 2006. – Vol. 25, №3. – P. 337 – 347.
3. Borisevich S. A., Kamluk A. N. *Three-dimensional model of an elastic rod and its application for dynamical analysis of the elastic tree stem* (in Russian) // Proc. of the Natl. Academy of Sciences of Belarus, Ser. Phys.-Math. Sci. – 2012. – Vol. 2. – P. 69 – 74.
4. Borisevitch S. A. *The finite-difference scheme to simulate the motion of a tree stem* (in Russian) // Proc. of the. Ser. II, Forestry Engineering and Woodworking Industry – 2008. – Vol. XVI. – P 104 – 107.
5. Orlov S. Ya., Shrager L. A. *Research of the resistance coefficient of cedar pine crown elements* (in Russian). // Tomsk State university, Journal of Mathematics and Mechanics. – 2011. – Vol. 2 (14). – P 103 – 110.
6. Dennis J. E., Schnabel R. B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations* (in Russian) // M: Mir, – 1988. – 440 p.
7. Allen M. P. *Computer Simulation of Liquids* // Oxford: Clarendon press. – 1999. – 385 p.

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОК НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

Босаков С. В.
РУП «Институт БелНИИС», Минск, Беларусь
sevibo@yahoo.com

В опубликованной ранее работе автора доклада [1] дано решение задачи об изгибе стержней и пластинок на основании Винклера в форме бесконечного ряда по собственным функциям дифференциального оператора изгибных колебаний стержня или пластинки со свободными краями. Получено, что осадки конструкции, собственные функции и коэффициенты ряда определяются выражениями

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i ,\ a_i = \frac{\left(q/D, \phi_i\right)}{\left(\lambda_i^4 + k/D\right)\beta_i},\ \beta_i = \left(\phi_i, \phi_i\right), \tag{1}$$

где q – вертикальная нагрузка на стержень или пластинку, D – изгибная (для пластинки – цилиндрическая) жесткость; ϕ_i, λ_i – собственные функции и числа; k – коэффициент постели основания.

Первые коэффициенты (1) соответствуют перемещениям стержня или пластинки как жесткого тела и находятся сразу из условий равновесия. Ниже рассматриваются две задачи об изгибе круглой и кольцевой пластинок на упругом основании Винклера под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке пластинки. Получены формулы в виде бесконечного ряда по собственным функциям. Дифференцированием этих рядов можно получить выражения для изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил в пластинках. Рассматривая полученные решения как поверхности влияния перемещений, можно определить осадки конструкции от произвольной нагрузки. В докладе последовательно приводятся решения:

– для круглой пластинки на основании Винклера под действием сосредоточенной силы и полосовой диаметральной нагрузки. Собственные функции и трансцендентное уравнение для определения собственных чисел дифференциального оператора изгибных колебаний круглой пластинки получены А. И. Цейтлиным [2];

– для кольцевой пластинки на основании Винклера под действием сосредоточенной силы. Собственные функции и собственные числа дифференциального оператора изгибных колебаний кольцевой пластинки получены ранее автором [1, 3].

Как частные случаи, для этих пластинок рассмотрены некоторые варианты осесимметричного нагружения, в которых получены точные решения, что служит подтверждением общности предлагаемого подхода. Приводятся рисунки изолиний равных прогибов при действии полосовой нагрузки на круглую пластинку и осадки кольцевой пластинки под действием сосредоточенной силы.

Автор считает своим долгом снова [4] обратить внимание на взаимосвязь дифференциального уравнения изгиба пластинки и статических граничных условий. Известно [5], что авторы создания технической теории изгиба пластинок три граничных условия для свободного края пластинки заменили двумя граничными условиями с использованием принципа Сен-Венана. Вследствие этой некорректности нарушается свойство ортогональности собственных функций дифференциального оператора изгибных колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями. В статье автора [4] приводятся числовые результаты, подтверждающие нарушение свойства ортогональности. Такое же нарушение наблюдается для кольцевой пластинки. По мнению автора, именно некорректные граничные условия вызывают нарушение свойства ортогональности собственных функций в рассматриваемых задачах.

Литература

1. Босаков С. В. *Расчет конструкций на упругом основании методом Ритца* // Вестник НИЦ «Строительство». Исследования по теории сооружений. – 2012 – №5 (XXX) – С. 38 – 53.
2. Цейтлин А. И. *Прикладные методы решения краевых задач строительной механики*. М.: Стройиздат, 1984. – 334 с.
3. Босаков С. В. *Метод Ритца в контактных задачах теории упругости*. Брест: БрГТУ, 2006. – 107 с.
4. Босаков С. В. *Частоты и модифицированные формы собственных колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями* // 2009. – Т.73, № 6. – с.954 – 958.
5. Александров А. В., Потапов В. Д. *Основы теории упругости и пластичности*. М.: Высшая школа, 1990. – 400с.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЭНДВИЧ-ОБОЛОЧКИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ СЛОЕВ

Воробьев С. А.
Белорусский государственный университет транспорта,
246653, г. Гомель, ул. Кирова 34
sergeyvorob@gmail.com

Представлена постановка задачи о динамическом нагружении круговой цилиндрической оболочки, выполненной из изотропных материалов в виде трехслойного пакета. Пакет несимметричен по высоте относительно срединной поверхности жесткого несжимаемого в поперечном направлении заполнителя. На первом этапе постановки задачи материалы слоев считаются линейно упругими. Применив вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, используя кинематические гипотезы С. П. Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получены уравнения движения оболочки в перемещениях для малых деформаций.

Демпфирующие свойства материалов слоев трехслойной оболочки учитываются на основе концепции комплексного модуля упругости $E_k^* = E_k\left(a_k + ib_k\right)$, $G_k^* = G_k\left(a_k + ib_k\right)$, где E_k, G_k – модули упругости материала, $a_k = \left(4-\gamma_k^2\right)\big/\left(4+\gamma_k^2\right)$, $b_k = 4\gamma_k^2\big/\left(4+\gamma_k^2\right)$, γ_k – коэффициент внутреннего трения материала k-го слоя ($k = 1, 2, 3$), i – мнимая единица. Уравнения движения оболочки в этом случае получаются заменой в уравнениях идеально упругой конструкции модулей упругости E_k, G_k на соответствующие операторы E_k^*, G_k^*:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\tilde{L}]\{U\} = \{F\},$$

где $[M]$ – матрица масс; $\{U\}^T = \{u, v, w, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}$ – искомая вектор-функция перемещений; $u\left(x_1, x_2, t\right)$, $v\left(x_1, x_2, t\right)$ – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности заполнителя в направлении координатных осей (ли-