

5. Mummert J., Sirois E., Sun W. *Quantification of Biomechanical Interaction of Transcatheter Aortic Valve Stent Deployed in Porcine and Ovine Hearts* // Ann. Biomed. Eng. – 2013. – Vol. 41 (3). – P. 577 – 586.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ БИОМЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Лавшук Д. А.

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь
dmrl@tut.by

Введение. Использование методов математического моделирования в исследованиях техники спортивных упражнений позволяет на качественно новом уровне обосновать оптимальные формы двигательных действий спортсменов, которые вносят наибольший вклад в достижение максимального спортивного результата. Таким образом, появляется возможность прогнозирования рациональной спортивной техники индивидуально для каждого исполнителя еще до того, как движение будет реализовано на практике, через проведение вычислительных экспериментов в имитационном моделировании на ЭВМ. Более того, использование математической теории оптимального управления динамическими системами позволяет полностью автоматизировать процесс конструирования оптимальной техники.

Цель исследования. Теоретическое обоснование и практическая реализация построения оптимального управления биомеханическими системами на основе принципа максимума Понтрягина.

Результаты исследования. Один из способов построения математической модели движения биомеханической системы – использование уравнений Лагранжа второго рода. В своем исследовании мы ограничились исследованием N -звенных плоскостных неразветвленных биомеханических систем, для которых математический аппарат разработан достаточно полно [1]. В этом случае движение может быть описано системой уравнений

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\phi}_j \cos(\phi_j - \phi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\phi}_j^2 \sin(\phi_j - \phi_i) + Y_i \cos(\phi_i) = u_i - u_{i+1}, i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где N – количество звеньев моделируемой системы; ϕ – вектор обобщенных координат биомеханической системы; A_{ij} – матрица динамических коэффициентов, определяемых масс-инерционными характеристиками звеньев тела спортсмена; $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ – соответственно первая и вторая производная вектора обобщенных координат по времени; Y – вектор обобщенных сил; u – вектор управляющих моментов мышечных сил в суставах.

Рассматривая моменты мышечных сил в качестве управляющих функций, запишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\ddot{\phi} = A^{-1} f, \quad (2)$$

$$A = \left\| A_{ij} \cos(\phi_j - \phi_i) \right\|, f = \left\| \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\phi}_j^2 \sin(\phi_j - \phi_i) - Y_i \cos(\phi_i) + u_i - u_{i+1} \right\|.$$

Зададим ограничения на управляющие функции $u_i(t)$, ограничения на момент окончания процесса, краевые условия на правом конце траектории. Зададим минимизируемый функционал, характеризующий качество исследуемого процесса – в его качестве может выступать достаточно произвольная математическая конструкция, связывающая различные биомеханические показатели движения – например, скорость движения общего центра тяжести биомеханической системы.

Для задачи оптимального управления, поставленной в форме, описываемой уравнениями (2) и наложенными ограничениями, функция Гамильтона и сопряженные переменные, исходя из принципа максимума Понтрягина [2], имеют вид

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n p_{n+i} \ddot{\phi}_i, \quad \dot{p}_i = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 2N.$$

Здесь x_i определяются зависимостями

$$x_i = \phi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad x_{n+i} = \dot{\phi}_i, \quad i = N+1, \dots, 2N.$$

При такой замене переменных имеем следующую систему сопряженных переменных:

$$\dot{p}_i = - \sum_{j=n+i}^{2n} p_j \frac{\partial \ddot{\phi}_{j-n}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \dot{p}_{n+i} = - \sum_{j=n+i}^{2n} p_j \frac{\partial \ddot{\phi}_{j-n}}{\partial x_{n+i}} - p_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Используя метод последовательных приближений [3], возможно численное решение поставленной оптимизационной задачи. Приведем краткую схему реализации метода:

1. Выбираем оптимизируемый критерий качества изучаемого процесса, задаем начальные условия движения системы, условия окончания процесса и ограничения на управляющие функции.
2. Задаем первоначальное произвольно выбранное управление.
3. Интегрируем уравнения движения с данным управлением, вычисляем обобщенные координаты, сопряженные для них переменные p_i .
4. Исходя из принципа максимума, определяем новое оптимальное управление для следующего шага итераций:

$$H(t, \phi^{(1)}(t), p^{(1)}(t), u^{(2)}(t)) = \max_{u \in U} H(t, \phi^{(1)}(t), p^{(1)}(t), u(t)),$$

где H – функция Гамильтона, t – время, U – пространство допустимых управлений, определяемое силовыми ресурсами спортсмена.

5. Вновь переходим к шагу 3 до тех пор, пока изменение заданного критерия качества превышает наперед заданную точность оптимизируемого критерия качества.

Вычислительные эксперименты с разработанной согласно приведенного алгоритма компьютерной программой показали принципиальную возможность использования математических методов оптимизации для решения практических задач по совершенствованию спортивной техники.

Литература

1. Загrevский В. И., Загrevский О. И. *Математические модели синтеза движений биомеханических систем*. Изд-во Palmarium Academic Publishing, 2012. – 175 с.
2. Понтрягин Н. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1966. – 366 с.
3. Черноушко Ф. Л., Баничук В. П. *Вариационные задачи механики и управления*. М.: Наука, 1973. – 238 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННЫХ МИКРОРОБОТОВ, МОНТИРУЕМЫХ НА ПЛАТФОРМАХ-ПЛАСТИНАХ

Минченя В. Т.^{*}, Чижик С. А.^{**}, Циммерманн К.^{***}, Чигарев В. А.^{*}

^{*}Беларуский национальный технический университет
пр-т Независимости 65 Минск, Беларусь

vlad_minch@mail.ru, vlt-chigarev2013@yandex.ru

^{**}НАН Беларусь, пр-т Независимости 66 Минск, Беларусь

chizhik_sa@tut.by

^{***}Технический университет Ильменау
Ehrenbergstraße 29, 98693 Ilmenau, Германия

klaus.zimmermann@tu-ilmenau.de

Создание и испытание реальных макетов вибрационных микророботов, монтируемых на платформах-пластинах показало их высокую энергоэффективность. В настоящее время в качестве двигателей-приводов микророботов применяют механические вибраторы, действие которых основано на использовании эффекта дисбаланса и ультразвуковые источники движения, колебания в которых возбуждаются с помощью пьезоэлементов. Применение конкретного вида вибродвижителя зависит от назначения миниробота.

Созданы макеты минироботов, платформой для которых являются пластины, стержни, оболочки, не меняющие свою форму, но вибрирующие в процессе движения. Выбор формы пластины-платформы производится эмпирическим путем, и сводится к выбору между эллипсом и треугольником, к которым крепятся конечности, представляющие собой тонкие криволинейные стержни. К настоящему времени выполнен большой объем экспериментальных работ по изучению спектра собственных частот отдельных элементов миниробота и в сборке.

Установлены с помощью скоростей видеосъемки характер взаимодействия конечностей с поверхностью, по которой перемещается миниробот. Оказалось, что конечности траектории, по которым движутся опорные точки имеют различный характер в зависимости от геометрии и физико-механических свойств поверхности, что в принципе позволило разработать диагностический тест по детектированию поверхности и получению оценок ее