

10. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. *On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography* // *Archive of Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 80. – P. 73 – 92.
11. Nikitin E., Zubov L. M. *Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress* // *Journal of Elasticity*. – 1998. – Vol. 51. – P. 1 – 22.
12. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A. *On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum* // *International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – Vol. 46. – P. 774 – 787.
13. Lurie A. I. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam: North-Holland. – 1990. – 617 p.
14. Zubov L. M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin: Springer-Verlag. – 1997. – 205 p.
15. Sheydaikov D. N. *Buckling of elastic composite rods of micropolar material subjected to combined loads* // *Advanced Structured Materials*. – 2011. – Vol. 7. – P. 255 – 271.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ГРАФЕНОВОЙ МЕМБРАНЫ

Беринский И. Е. ^{*†}, Кривцов А. М. ^{†*}

* Институт проблем машиноведения РАН
199178, Санкт-Петербург, Россия, Большой пр. В. О. 61
iberinsk@gmail.com

† Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет
195251, Санкт-Петербург, Россия, Политехническая ул. 29
akrivtsov@bk.ru

Графен – монослой графита одноатомной толщины – считается одним из самых перспективных материалов для создания НЭМС нового поколения. Графеновые резонаторы, представляющие собой слой графена длиной несколько микрон между двумя «зажимами» сейчас находятся на начальной стадии разработки, поэтому существует ряд актуальных проблем, связанных с их проектированием и производством. Для адекватного моделирования НЭМС на основе графеновых наномембран необходимы модели, позволяющие учесть наличие изгибной жесткости одноатомных атомарных слоев, т.е. неклассические модели взаимодействия на микроуровне. Требуется детальная разработка подобных моделей, с обязательным использованием экспериментальных данных для определения параметров потенциалов межатомного взаимодействия.

Рассматриваются поперечные колебания графенового листа, натянутого над канавкой в подложке. С целью вычисления собственных частот колебаний вводятся две модели: модель мембраны (или струны в одномерном случае) и модель пластины (балки). Механические свойства нанорезонаторов определяются свойством резонирующей наномембраны сопротивляться как изгибу, так и растяжению. Если в качестве материала резонирующей пленки используется графен, и при колебаниях преобладает изгибная жесткость, то пленка ведет себя как упругая балка, если преобладает продольная жесткость – то колебания происходят по принципу струны.

Показывается, что изгибная жесткость графенового листа не является параметром модели струны, однако в более сложных моделях изгибная жесткость может и должна учитываться. В данной работе изгибная жесткость графена определяется на основе параметров взаимодействия атомов углерода в его кристаллической решетке. Взаимодействие между двумя атомами углерода моделируется посредством упругого стержня, работающего на сжатие–растяжение, изгиб и кручение [1]. Подобным стержнем моделируется взаимодействие электронных облаков, которые формируют направленную ковалентную химическую связь. Упругие характеристики этого стержня подбираются так, чтобы полученная в результате модель удовлетворяла экспериментальным модулям упругости исследуемого кристалла. Далее рассматривается энергия деформирования графенового кристалла на микроуровне. Ей в соответствии ставится энергия деформирования, рассмотренная на макроуровне, на котором решетка графена моделируется обобщенным континуумом, содержащем моментный тензор жесткости в дополнение к силовому. Из сравнения выражений для энергии деформирования упругие характеристики графена определяются через параметры стержней, моделирующих связь. В частности, показывается, что изгибная жесткость графена выражается простой формулой, содержащей жесткости стержня на изгиб и кручение, и может быть определена однозначно из экспериментальных данных, полученных при растяжении и сдвиге графенового листа.

Произведено сравнение частот колебаний, вычисленных с использованием моделей балки и струны. Результаты сравнения этих частот показывают, что при длинах более одного нанометра струнная модель дает более высокие частоты, при длинах менее одного нанометра более высокими оказываются частоты, рассчитанные согласно балочной модели. Таким образом, балочный тип колебаний преобладает только для особо коротких графеновых листов. Отметим однако, что этот результат соответствует натяжению листа, полученному при максимальном несоответствии решеток листа и подложки. При лучшем соответствии решеток сила натяжения будет меньше, и, следовательно, в этом случае балочный тип колебаний может реализовываться и для более длинных графеновых листов.

С целью сравнения проверки аналитических результатов было проведено компьютерное моделирование колебаний графеновой мембраны методом молекулярной динамики с использованием потенциала Бреннера [2]. Показано, что компьютерная модель напряженного графенового слоя лучше соответствует модели струны, в то время как ненапряженная пластина более соответствует балочной модели.

В ходе работы было определено соотношение между изгибной жесткостью, продольной жесткостью и параметрами взаимодействия однослойных графеновых листов, определены собственные частоты колебаний для разных длин резонаторов и проведено сравнение аналитических и компьютерных моделей. Эти результаты позволяют выработать рекомендации по оптимальной конструкции НЭМС на базе резонирующих мембран.

Литература

1. Беринский И. Е. *Стержневая модель кристаллической решетки графена* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010, № 3. – С. 13 – 20.
2. Brenner D. W., Shenderova O. A., Harrison J. A. *A second-generation reactive empirical bond order (REBO) potential energy expression for hydrocarbons* // Journal of Physics–Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14 (4). – P. 783 – 802.

ПРОГИБ ПОЛОГОЙ НАНОРАЗМЕРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИЛОЙ

Ботогова М. Г., Михасев Г.И.

Белорусский государственный университет
220030, Беларусь, г. Минск, пр-т Независимости, 4
batahova@bsu.by

Целью данной работы являлось определение нормального прогиба сферической пологой в плане наноразмерной оболочки (которой могут моделироваться такие наноразмерные объекты как биологическая клетка, фуллерен и др.), нагруженной сосредоточенной силой.

С учетом нелокальной теории упругости Эрингена [2], уравнения сферической нанооболочки можно переписать в виде [2]:

$$\left(\Delta + \frac{2}{R^2}\right) \left(D \left(\Delta + \frac{1+\nu}{R^2} \right) w - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \Delta \right) \Phi \right) = \left(1 - \frac{(2-\nu)h^2 \Delta}{10(1-\nu)} \right) \Xi Z,$$

$$\left(\Delta + \frac{2}{R^2}\right) \left(\frac{1}{Eh} \left(\Delta + \frac{1-\nu}{R^2} \right) \Phi + \frac{w}{R} \right) = \frac{-\nu}{2E} \Delta \Xi Z, \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad \Xi = 1 - \frac{(e_0 a)^2}{l^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = 1 - (e_0 a)^2 \Delta.$$

Здесь Ξ – оператор Эрингена [2], Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат x, y ; w – нормальный прогиб, Φ – функция напряжений, R – радиус оболочки, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки, Z –

внешняя нормальная нагрузка, $l = \frac{\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}$, $a=0,142$ нм – характерный

внутренний размер наноразмерной оболочки (например, биологической клетки, фуллерена), а e_0 – материальная константа нелокальности.

Считаем, что оболочка, нагружена в точке $x=0, y=0$ сосредоточенной нормальной силой P , направленной наружу. Подобный тип нагрузки может имитировать силы адгезии, действующие на биоклетку при отводе наноиндентора.

С использованием интегрального преобразования Фурье [3] в работе в явном виде получена формула для нормального прогиба наноразмерной оболочки:

$$w = w^* + w^{**}, \quad (2)$$