СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Ермоченко С. А.
ВГУ имени П. М. Машерова, 210038, Беларусь, г. Витебск, пр-т. Московский, 33
yermochenko@tut.by

Введение. В работе рассматривается тонкая изотропная кольцевая пластина, у которой внешняя и внутренняя границы представляют собой концентрические окружности радиусов a и b соответственно.

Среднее ухо является сложной колебательной системой, основной частью которой является упругая барабанная перепонка, передающая через цепь слуховых косточек энергию звуковой волны во внутреннее ухо. В результате повреждений барабанная перепонка заменяется упругой хрящевой пластиной, а цепь косточек – на искусственный протез. При этом введение протеза вызывает деформацию пластины, что вызывает усилия, действующие на основание протез, которые фиксируют протез в полости среднего уха до его сращивания с хрящом пластины [1]. Однако начальные деформации и напряжения влияют на спектр собственных частот колебательной системы, поэтому актуальным является исследование собственных частот кольцевой пластины, моделирующей восстановленную барабанную перепонку.

Механико-математическая модель. Рассмотрим изотропную кольцевую пластину толщиной h, с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. На внутреннем контуре рассматривается модель, соответствующая случаю окончательного сращивания основания протеза с пластиной. Тогда можно рассматривать граничные условия для жесткой заделки. На внешней границе, по которой барабанная перепонка соединяется с упругим тимпанальным кольцом, рассматривается упругая заделка. Тимпанальное кольцо моделируется системой линейных и торсионных пружин с коэффициентами жесткости k_l и k_t [2].

Введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$, связанную с центром пластины. Тогда смещение точек пластины вдоль соответствующих ортов обозначим u_1, u_2 и w, которые являются функциями координат r, φ и t (время). Запишем уравнения движения [3]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial r}+\frac{1}{r}T_1-\frac{1}{r}T_2+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \varphi}-\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial S}{\partial r}+\frac{2}{r}s-\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_1}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial \varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial H}{\partial \varphi}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

где ρ – плотность хряща.

Соотношения упругости через деформации выражаются как:

$$T_1=K\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{\nu}{r}u_1+\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right),\quad T_2=K\left(\nu\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r}u_1+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right),$$

$$M_1 = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \quad M_2 = D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \tag{3}$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{r}u_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right), \quad H = D(1-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right),$$

где $K = Eh/\left(1-\nu^2\right)$, $D = Eh^3/\left[12\left(1-\nu^2\right)\right]$.

Подставляя соотношения (3) в уравнения (1)–(2) получим уравнения движения в перемещениях, однако для описания движения точек предварительно напряженной пластины необходимо в уравнение (2) добавить дополнительно слагаемое:

$$\Delta_T w = T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{T_1^0}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2S^0}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{T_2^0}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{4}$$

Величины T_1^0, T_2^0 и S^0 могут быть найдены из решений уравнений (1)–(2) в случае статического нагружения, тогда в этих уравнениях опускаются последние слагаемые (дифференциалы по времени), а деформации u_1, u_2 и w рассматриваются независящими от t [1].

Граничные условия рассмотрим в следующем виде (на внутреннем контуре рассматриваются условия жесткого защемления, при этом центр основания протеза перемещается в точку $P(r_p, \varphi_p, z_p)$ и совершает поворот вокруг оси $\varphi = 0$ на угол θ):

$$\begin{gathered}
\left.\left(\frac{\partial M_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_1 - M_2) + \frac{2}{r}\frac{\partial H}{\partial \phi} + k_l w\right)\right|_{r=a} = \left.\left(M_1 + k_t\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right|_{r=a} = u_1\big|_{r=a} = u_2\big|_{r=a} = 0,\\
u_1\big|_{r=b} = r_p\cos(\phi_p - \phi) - b(1-\cos(\theta))\sin^2(\phi),\\
u_2\big|_{r=b} = r_p\sin(\phi_p - \phi) - \frac{b}{2}(1-\cos(\theta))\sin(2\phi),\\
w\big|_{r=b} = z_p + b\sin(\theta)\sin(\phi), \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = -\sin(\theta)\sin(\phi).
\end{gathered} \tag{5}$$

Решение уравнения (2) с учетом (4) и граничных условий (5) находится путем разделения переменных (здесь ω – искомая собственная частота):

$$w(r,\phi) = \left(w^0(r) + w^c(r)\cos(\phi) + w^s(r)\sin(\phi)\right)e^{i\omega t}. \tag{6}$$

Заметим, что рассмотрение только одного уравнения (2) не рассматривает колебания в плоскости самой пластины, так как такие колебания практически не передают энергию во внутреннее ухо.

Заключение. После подстановки полученных частных решений в уравнение (2) получаем нелинейное алгебраическое уравнение относительно частоты ω. Решая численно это уравнение с различными начальными условиями, получим собственные частоты колебаний пластины. При этом в уравнение в качестве параметров входят величины r_p, φ_p, z_p и θ, определяющие степень начальной деформации пластины, что дает возможность проанализировать зависимость собственных частот от начальных деформаций.

Кроме того полученные соотношения могут использоваться для составления математической модели восстановленного среднего уха в целом, что позволит проанализировать собственные частоты всей колебательной системы.

Литература

1. Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. *On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis* // Journal of the Mathematical Medicine and Biology. – 2010. – Vol. 27(4). – P. 289 – 312.
2. Koike T., Wada H., Kobayashi T., *Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes* // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear. Proceedings of the Second International Symposium on Middle-Ear Mechanics in Research and Otosurgery, held in Boston, MA, USA, October 21st 24th, 1999 / Boston, MA; edited by J. J. Rosowski, S. N. Merchant. – The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 309 – 320.
3. Михасев Г. И., Товстик П. И., *Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы*. Москва: Физматлит. – 2009. – 292 с.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ ТЕХНИКИ СПОРТИВНЫХ УПРАЖНЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО СИНТЕЗА ОТДЕЛЬНЫХ ФАЗ ДВИГАТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Загревский В. И.

Могилевский государственный университет им А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

zvi@tut.by

Введение. В настоящее время биомеханический анализ техники спортивных упражнений основан на структурно-параметрическом подходе, предполагающем деление исследуемого упражнения на составные части [1, 2]: периоды, стадии, фазы. В дальнейшем, на основе логических умозаключений, построенных на использовании биомеханических закономерностей двигательных действий, рассматривают влияние параметрических изменений в отдельных компонентах упражнения, на траекторию биомеханической системы и делается вывод о возможности или отсутствии последующей рациональной перестройки в технике упражнения. Отличительной чертой данного подхода является наличие экспериментальных материалов инструментальной или оптической регистрации движений, являющихся информационной базой исследовательской работы по совершенствованию кинематической и динамической структуры упражнений.

В целом рассматриваемый подход в прогнозировании рациональных форм построения движений является конструктивным и имеет положительный баланс практического использования. Однако в ряде случаев он не может ответить на многие вопросы спортивной практики. Особенно это касается тех во-