

УДК 517.948.32:517.544

Е.В. ДАВЬЯЛОВА

# **РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА**

The author considered boundary value non-homogeneous problem  $a(\xi)\varphi^+(\xi) + b(\xi)\overline{\varphi^+(\xi)} + c(\xi)\varphi^-(\xi) + d(\xi)\overline{\varphi^-(\xi)} = f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  of finding the function  $\varphi(\zeta)$  and solved it in a class of bounded functions.

Рассмотрим задачу нахождения функций  $\varphi$ , кусочно-аналитических и ограниченных в плоскости переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  с линией разрыва  $\text{Im } \zeta = 0$ . Предельные значения слева ( $\varphi^+$ ) и справа ( $\varphi^-$ ) от выбранной ориентации оси (ось условимся ориентировать слева направо) связаны уравнением

$$a(\xi)\varphi^+(\xi) + b(\xi)\overline{\varphi^+(\xi)} + c(\xi)\varphi^-(\xi) + d(\xi)\overline{\varphi^-(\xi)} = f(\xi), \quad (1)$$

коэффициенты которого ограничены,  $H$ -непрерывны на  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  и удовлетворяют другим ограничениям, указываемым ниже.

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим тождествам:

$$\begin{aligned} |a(\xi)| &= |b(\xi)|, \quad |c(\xi)| = |d(\xi)| \quad \text{при } \xi \in (-\infty, -1) \Pi(0, 1), \\ b(\xi) &\equiv d(\xi) \equiv 0 \quad \text{при } \xi \in (-1, 0) \Pi(1, +\infty) \end{aligned} \quad (2)$$

и больше нигде не обращаются в нуль. Для преобразования краевых условий введем обозначения:

$$a(\xi) = |a(\xi)| e^{i\alpha(\xi)}, \quad b(\xi) = |b(\xi)| e^{i\beta(\xi)}, \quad c(\xi) = |c(\xi)| e^{i\gamma(\xi)}, \quad d(\xi) = |d(\xi)| e^{i\delta(\xi)}.$$

Тогда при  $\xi \in (-\infty, -1) \Pi(0, 1)$ , опуская для краткости аргумент, из (1) получим следующее уравнение:

$$|a| \left( e^{i\alpha} \varphi^+ + e^{i\beta} \overline{\varphi^+} \right) + |c| \left( e^{i\gamma} \varphi^- + e^{i\delta} \overline{\varphi^-} \right) = f.$$

Умножая это равенство на  $\exp\left(-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)$ , получим

$$|a| e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \left( e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ + e^{i \frac{\beta - \alpha}{2}} \overline{\varphi^+} \right) + |c| e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \left( e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- + e^{i \frac{\delta - \gamma}{2}} \overline{\varphi^-} \right) = f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$2|a| e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ \right) + 2|c| e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- \right) = f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}}.$$

Исключая  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$ , при  $\xi \in (-\infty, -1) \Pi(0, 1)$  получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( 2|a| e^{-i \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}} \cdot \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ \right) \right) &= \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \right), \\ \operatorname{Im} \left( 2|c| e^{-i \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}} \cdot \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- \right) \right) &= \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \right). \end{aligned}$$

Предположив для простоты, что  $\sin \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}$  нигде не обращается в нуль, находим

$$e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ + e^{i \frac{\beta - \alpha}{2}} \overline{\varphi^+} = \frac{\operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}}, \quad (3)$$

$$e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- + e^{i \frac{\delta - \gamma}{2}} \overline{\varphi^-} = - \frac{\operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}}. \quad (4)$$

При  $\xi \in (-1, 0) \Pi(1, +\infty)$ , учитывая тождество (2), из (1) получим

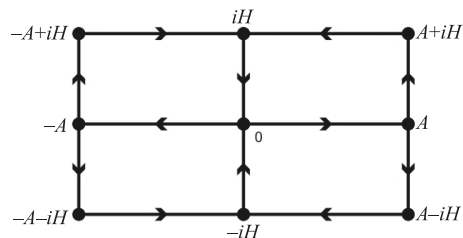
$$a(\xi) \varphi^+(\xi) + c(\xi) \varphi^-(\xi) = f(\xi). \quad (5)$$

Таким образом, при сделанных предположениях задача (1) сводится к краевой задаче на плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  с краевыми условиями (3), (4) при  $\xi \in (-\infty, -1) \Pi(0, 1)$  и (5) при  $\xi \in (-1, 0) \Pi(1, +\infty)$ . Данная краевая задача допускает решение в замкнутой форме [2]. Получим это решение. С этой целью

построим функцию  $\zeta = \zeta(z)$ ,  $z = z(\zeta)$ ,  $z = \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}$ ,  $0 < t < 1$ ,  $\sqrt{t(1-t^2)} > 0$ , реализующую кон-

формный гомеоморфизм верхней полуплоскости ( $\operatorname{Im} \zeta > 0$ ) на прямоугольник со следующим соответствием граничных точек:  $\zeta(0) = 0$ ,  $\zeta(1) = A$ ,  $\zeta(\infty) = A + iH$ ,  $\zeta(-1) = iH$ . Отображающую функцию продолжим аналитически через интервал  $(-1, 0)$  в нижнюю полуплоскость. Получим гомеоморфизм

плоскости  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$  на прямоугольник с вершинами  $A, -A, A+iH, -A+iH$ . Введем новую неизвестную функцию  $\Phi(z) = \phi(\zeta(z))$ , которая продолжается в нижний прямоугольник по принципу симметрии  $\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$ . Функция  $\zeta = \zeta(z)$ , обратная к функции  $z = z(\zeta)$ , является двоякопериодической  $\wp$ -функцией Вейерштрасса [1]. Поэтому новая неизвестная функция  $\Phi(z)$  является двоякопериодической с основными периодами  $2A$  и  $2iH$ .



Фундаментальная область

Введем в качестве фундаментальной области прямоугольник  $\Pi$  с контуром  $K$  и вершинами  $\pm A \pm iH$  (рисунок). Компоненты контура обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1: 0 < x < A, y = 0; & \quad K_2: -A < x < 0, y = 0; \\ K_3^+: 0 < x < A, y = H; & \quad K_4^+: -A < x < 0, y = -H; \\ K_5: x = 0, 0 < y < H; & \quad K_6: x = 0, -H < y < 0; \\ K_7^+: x = A, 0 < y < H; & \quad K_8^+: x = -A, -H < y < 0, \end{aligned}$$

где верхний индекс «+» означает левый берег разреза. Следовательно,  $K = \bigcup_{j=1}^8 K_j$ .

Исходя из равенств (3), (4), запишем краевые условия, которым удовлетворяет функция  $\Phi$  на горизонтальных составляющих контура

$$\Phi^+(x) = -e^{i(\beta-\alpha)}\Phi^-(x) + \frac{e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad x \in K_1,$$

$$\Phi^+(x) = -e^{i(\gamma-\delta)}\Phi^-(x) - \frac{e^{-i\frac{\delta-\gamma}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad x \in K_2,$$

$$\Phi^+(x+iH) = -e^{i(\beta-\alpha)}\Phi^-(x-iH) + \frac{e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad 0 < x < A,$$

$$\Phi^+(x-iH) = -e^{i(\gamma-\delta)}\Phi^-(x+iH) - \frac{e^{-i\frac{\delta-\gamma}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad -A < x < 0.$$

Учитывая условие (5), на вертикальных составляющих контура получим

$$\Phi^+(iy) = -\frac{c}{a}\Phi^-(iy) + \frac{f}{a}, \quad y \in K_5,$$

$$\Phi^+(iy) = -\frac{\bar{a}}{c}\Phi^-(iy) + \frac{f}{c}, \quad y \in K_6,$$

$$\Phi^+(A+iy) = -\frac{c}{a}\Phi^-(A+iy) + \frac{f}{a}, \quad 0 < y < H,$$

$$\Phi^+(-A+iy) = -\frac{\bar{a}}{c}\Phi^-(A+iy) + \frac{f}{c}, \quad -H < y < 0.$$

Таким образом, задача свелась к задаче Римана на торе, решения которой мы ищем в классе двоякопериодических функций с основными периодами  $2A$  и  $2iH$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in K, \quad (6)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} -e^{i(\beta-\alpha)}, & t \in K_1, t \in K_3, \\ -e^{i(\gamma-\delta)}, & t \in K_2, t \in K_4 \\ -\frac{c}{a}, & t \in K_5, t \in K_7, \\ -\frac{a}{c}, & t \in K_6, t \in K_8, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, & t \in K_1, t \in K_3, \\ \frac{e^{-i\frac{\delta-\gamma}{2}} \operatorname{Im} \left( f \cdot e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, & t \in K_2, t \in K_4, \\ \frac{f}{a}, & t \in K_5, t \in K_7, \\ \frac{\bar{f}}{c}, & t \in K_6, t \in K_8. \end{cases}$$

Вычислим индекс  $\varkappa$  коэффициента  $G(t)$  задачи. Известно, что  $\varkappa = \sum_{i=1}^4 \varkappa_i$ . Применяя свойства аргумента, находим

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \left[ \frac{1}{\pi} \arg \frac{c(-0i)}{a(-0i)} - \frac{1}{2\pi} (\beta(+0) - \alpha(+0) + \gamma(+0) - \delta(+0)) \right], \\ \varkappa_2 &= \left[ \frac{1}{2\pi} (\beta(-A) - \alpha(-A) + \gamma(-A) - \delta(-A)) - \frac{1}{\pi} \arg \frac{c(+0i)}{a(+0i)} \right], \\ \varkappa_3 &= \left[ \frac{1}{\pi} \arg \frac{c(-iH)}{a(-iH)} - \frac{1}{2\pi} (\beta(+A) - \alpha(+A) + \gamma(+A) - \delta(+A)) \right], \\ \varkappa_4 &= \left[ \frac{1}{2\pi} (\beta(-0) - \alpha(-0) + \gamma(-0) - \delta(-0)) - \frac{1}{\pi} \arg \frac{c(+iH)}{a(+iH)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть. Для построения общего решения задачи (6) достаточно построить частное решение этой задачи и прибавить к нему общее решение однородной задачи [2]

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in K, \quad (7)$$

вычисляемое по формуле

$$\Phi(t) = \varphi(t) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_K \ln G(t) \hat{\omega}(\tau-t) - \int_0^{q_1} \hat{\omega}(\tau-t) + 2\pi i m \frac{t}{2A} \right\}, \quad (8)$$

где  $\varphi$  – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{E}^{-1}$ ,  $\mathcal{E} := (t_1)^{\varkappa_1} (t_2)^{\varkappa_2} (t_3)^{\varkappa_3} (t_4)^{\varkappa_4}$ ,  $\mathcal{F} = (0)(q_1)^{-1}$ ,  $\operatorname{ord} \mathcal{E} = \varkappa$ ,  $\operatorname{ord} \mathcal{F} = 0$ . Точки  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \pm A$ ,  $t_3 = \pm A \pm iH$ ,  $t_4 = \pm iH$  – точки разрыва коэффициента  $G(t)$  задачи (17),  $\tilde{q} \in \Pi$  – произвольно зафиксированная точка,  $q_1 \in \Pi$ , путь интегрирования полностью лежит в прямоугольнике  $\Pi$ . Точку  $q_1$  находим из проблемы обращения Якоби

$$q_1 = \tilde{q} + \frac{1}{2\pi i} \int_a \ln G(t) dt + 2An + 2\pi i Hm,$$

где

$$m = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2H} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a \ln G(t) dt \right) \right].$$

Условие разрешимости задачи (6) выражает следующая

**Теорема.** Неоднородная задача (6) разрешима, если и только если выполняется равенство

$$\int_K g(t) d\Psi^+(t) = 0, \quad (9)$$

где  $d\Psi(z)$  – любое решение однородной союзной задачи, допускающее особенности интегрируемых порядков:

$$d\Psi^+(t) = G(t) d\Psi^-(t), \quad (1) \parallel (d\Psi), \quad t \in K. \quad (10)$$

Необходимость следует из интегральной теоремы Коши. Достаточность нужно доказать.

Предположим, что условие (8) выполняется. Частное решение задачи (6) будет представляться различными аналитическими выражениями в зависимости от того, разрешима нетривиально задача (9) или нет. По теореме Римана – Роха  $l - l' = \kappa - h + 1$ , где  $l$  и  $l'$  – числа решений однородной задачи (7) и союзной задачи (10) соответственно. В нашем случае  $h = 1$ ,  $l - l' = \kappa$ .

Пусть нетривиальное решение существует, тогда  $l - l' = \kappa < 0$ ,  $l = 0$ ,  $l' > 0$ . Задача (6) сводится к задаче «о скачке» для кусочно-аналитического дифференциала. Для этого исключим из равенств (6), (10) коэффициент  $G(t)$  и получим

$$\Phi^+(t) d\Psi^+(t) - \Phi^-(t) d\Psi^-(t) = g(t) d\Psi^+(t). \quad (11)$$

Запишем общее решение однородной задачи (7) в виде  $\Phi(z) = \hat{\phi}(z) \mathcal{X}(z)$ , где  $\hat{\phi}(z)$  – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору  $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{E}^{-1}$ . Общее решение однородной союзной задачи запишем в виде

$$d\Psi(z) = \frac{d\psi(z)}{\mathcal{X}(z)},$$

где  $d\psi(z)$  – произвольный абелев дифференциал, кратный дивизору  $\mathcal{EF}$ . Учитывая, что  $dz$  не имеет ни нулей, ни полюсов, перепишем (11) в виде

$$\Phi^+(t) d\Psi'(t^+) - \Phi^-(t) d\Psi'(t^-) = g(t) d\Psi'(t^+).$$

В силу условия (9) общее решение задачи (11) можно вычислить по формуле

$$\Phi(t) d\Psi'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_K g(\tau) \zeta(\tau - z) d\Psi^+(\tau) + C, \quad (12)$$

где  $C$  – произвольная постоянная, а  $\zeta(\tau - z)$  – дзета-функция Вейерштрасса. Данная функция выбрана в качестве аналога ядра Коши, так как она квазипериодическая, и если точка  $z$  изменяется на период, то к функции  $\zeta(\tau - z)$  прибавляются константы. Также она симметрична относительно действительной  $\overline{\zeta(\bar{z})} = \zeta(z)$  и мнимой осей  $\overline{\zeta(-\bar{z})} = -\zeta(z)$ . Отсюда в силу равенства (9) заключаем, что функция (12) двоякопериодическая. Решение задачи (11), если оно существует, содержится в формуле

$$\Phi(z) = \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_K g(t) \zeta(t - z) d\Psi^+(t) + C}{\Psi'(z)}. \quad (13)$$

Константу  $C$  подберем так, чтобы функция (13), удовлетворяющая условию (6), была решением задачи (6). Для этого достаточно обеспечить кратность функции (13) дивизору  $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{E}^{-1}$  [2]. Тогда единственное решение задачи (6) выразится формулой (13).

Исходя из того, что числитель формулы (13) должен обращаться в нуль в нулях знаменателя, рассмотрим дивизор порядка нуль

$$\left( \frac{d\psi(z)}{dz} \right) = \frac{\tilde{q} \cdot t_1^{\kappa_1} \cdot t_2^{\kappa_2} \cdot t_3^{\kappa_3} \cdot t_4^{\kappa_4}}{q_1 \cdot \mathcal{D}}, \quad (14)$$

где  $\mathcal{D}$  – неизвестный дивизор,  $\text{ord } \mathcal{D} = \kappa < 0$ . Пользуясь произволом в выборе дивизора  $\mathcal{D}$ , положим

$$\mathcal{D} = \frac{t_1^{\kappa_1+1} \cdot t_2^{\kappa_2} \cdot t_3^{\kappa_3} \cdot t_4^{\kappa_4}}{\tilde{t}_2}, \quad (15)$$

где  $\tilde{t}_2$  – точка, отличная от  $t_2$ . В теории эллиптических функций [1] полностью решен вопрос о существовании функции с наперед заданными нулями и полюсами в точках  $a_1, \dots, a_n \in \Pi$ ,  $b_1, \dots, b_n \in \Pi$ , где каждый нуль и каждый полюс записан столько раз, какова его кратность. Существование такой функции равносильно выполнению сравнения по модулю периодов

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Таким образом, подставляя равенство (15) в (14), получим

$$\left( \frac{d\psi(z)}{dz} \right) = \frac{\tilde{q} \cdot \tilde{t}_2}{q_1 \cdot t_1},$$

а это в свою очередь равносильно выполнению сравнения  $\tilde{q} + \tilde{t}_2 = q_1 + t_1$ .

В силу того что числитель правой части равенства (12) должен обращаться в нуль в нулях знаменателя, должно выполняться

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K g(t) \zeta(t - \tilde{t}_2) d\Psi^+(t) + C = 0.$$

Отсюда находим значение константы  $C$ , при котором формула (12) дает решение неоднородной задачи (6).

Предположим теперь, что задача (9) не имеет нетривиальных решений, т. е.  $\kappa > 0$ ,  $l' = 0$ ,  $l > 0$ . Это равносильно тому, что в формуле, выражающей общее решение задачи (9)

$$d\Psi(t) = d\psi(t) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_K \ln G(t) \hat{\omega}(\tau - t) d\tau + \int_q^{q_1} \hat{\omega}(\tau - t) d\tau - 2\pi i m \frac{t}{2A} \right\},$$

дифференциал  $d\psi(t) \equiv 0$ . Отсюда следует, что  $\text{ord}(\mathcal{EF}) \geq 0$ , и, добавляя в знаменатель дивизора конечное число точек, не лежащих на контуре  $K$ , дополним его до минимального. Дивизор  $\Delta$  называется минимальным, если его порядок равен нулю; не существует эллиптических функций, кратных  $\Delta^{-1}$ , и не существует эллиптических дифференциалов, кратных  $\Delta$ . В нашем случае минимальный дивизор совпадает с дивизором  $\mathcal{F} = \frac{\tilde{q}}{q_1}$ , т. е.  $\Delta = \mathcal{F}$ . Удостоверимся в этом.

Точки  $\tilde{q}$  и  $q_1$  не сравнимы по модулю периодов, так как они обе лежат в  $\Pi$ , и сравнение перешло бы в равенство. На римановой поверхности рода  $h=1$  не существует эллиптической функции с одним простым нулем и полюсом. Аналогично не существует эллиптический дифференциал.

Составим мероморфный аналог ядра Коши  $A(\tau, z) d\tau$ , который по переменной  $\tau$  является абелевым дифференциалом, кратным дивизору  $z^{-1} \Delta = \frac{\tilde{q}}{q_1 \cdot z}$ , а по переменной  $z$  – мероморфной функцией,

кратной дивизору  $\tau^{-1} \Delta^{-1} = \frac{q_1}{\tilde{q} \cdot \tau}$ :

$$A(\tau, z) d\tau = \zeta(\tau - z) d\tau - \zeta(\tau - q_1) d\tau - \zeta(\tilde{q} - z) d\tau + \zeta(\tilde{q} - q_1) d\tau. \quad (16)$$

Точки  $\tau$  и  $z$  принадлежат основному прямоугольнику  $\Pi$ . Покажем, что точка  $q_1$

$$q_1 = \tilde{q} + \frac{1}{2\pi i} \int_a \ln G(t) dt + 2An + 2\pi i Hm,$$

где  $a = [-A - iH, A - iH]$ , лежит на вещественной оси. Положим  $\tilde{q} = 0$ , тогда

$$q_1 = 0 + \frac{1}{2\pi i} \int_a \ln(-e^{i(\gamma - \delta)}) dt = A + \frac{\gamma - \delta}{\pi}.$$

Ядро  $A(\tau, z) d\tau$ , заданное формулой (15), принимает вещественные значения на вещественной оси и мнимые на мнимой и, таким образом, симметрично.

Обозначим через  $\mathcal{X}_0(z)$  функцию, в которую переходит правая часть формулы (8), если положить в ней  $\varphi(z)=1$ . Функция  $\mathcal{X}_0(z)$  удовлетворяет краевому условию (7), поэтому задачу (6) можно свести к задаче «о скачке»

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathcal{X}_0^+(z)} - \frac{\Phi^-(t)}{\mathcal{X}_0^-(z)} = \frac{g(t)}{\mathcal{X}_0^+(z)}, \quad t \in K,$$

для нахождения кусочно-мероморфной функции  $\left(\frac{\Phi}{\mathcal{X}_0}\right)$ , кратной дивизору  $\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}$ .

Функция

$$\Phi(z) = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_K \frac{g(\tau)}{\mathcal{X}_0^+(\tau)} A(\tau, z) d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, является решением задачи (6).

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.

2. Зверович Э. И. // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 1(157). С. 113.

Поступила в редакцию 10.04.09.

**Елена Вячеславовна Давьялова** – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Э. И. Зверович.