

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ ВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Т. В. Цеховая

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: Tsekhavaya@bsu.by

Построена оценка взаимной вариограммы действительного r – мерного внутренне стационарного гауссовского случайного процесса с непрерывным временем. Найдены выражения для первых двух моментов исследуемой статистики. При условии, что ряд из взаимных вариограмм абсолютно сходится, исследовано асимптотическое поведение ковариации и дисперсии оценки взаимной вариограммы.

Ключевые слова: временной ряд, гауссовский случайный процесс, внутренняя стационарность, взаимная вариограмма, оценка.

Изучению одномерных стационарных случайных процессов посвящена обширная литература. Например, построение и исследование оценок ковариационных функций, спектральных плотностей проводились в работах [1, 2]. Статистический анализ оценок вариограмм сделан N. Cressie в монографии [3], Т.В. Цеховой в статьях [4, 5].

Во многих практических задачах часто приходится иметь дело с многомерными стационарными случайными процессами. Исследованию различных аспектов анализа таких процессов посвящены работы Д. Бриллинджера [6], Н.Н. Труша [7], где рассматриваются вопросы построения и изучения оценок взаимных ковариационных функций, взаимных спектральных плотностей.

В данной работе для многомерного внутренне стационарного гауссовского случайного процесса строится оценка взаимной вариограммы. Находятся выражения для первых двух моментов построенной статистики, исследуется асимптотическое поведение ковариации и дисперсии.

Приведем без доказательства некоторый вспомогательный результат.

Лемма 1 [8]. Пусть X, Y – случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $\rho(X, Y) = \text{cov}\{X, Y\} / \sqrt{D\{X\}D\{Y\}} = \rho$. Тогда коэффициент корреляции $\rho(X^2, Y^2) = \rho^2$.

Пусть $Y^r(s) = \{Y_a(s), a = \overline{1, r}\}$, $s \in R$, $r \geq 1$, – действительный r – мерный внутренне стационарный случайный процесс с постоянным математическим ожиданием $MY_a(s) = m$, $a = \overline{1, r}$, и взаимной семивариограммой [3]

$$\gamma_{ab}(h) = 0.5D\{Y_a(s+h) - Y_b(s)\}, \quad a, b = \overline{1, r}, \quad s, h \in R.$$

Найдем ковариацию приращений процесса $Y^r(s)$, $s \in R$. Рассмотрим сначала случай приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$, $Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)$, $a_1, a_2, b_1 = \overline{1, r}$, $s_i \in R$, $i = \overline{1, 3}$, имеющих одну общую точку.

Лемма 2. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)$, $s_1 \leq s_2 \leq s_3$, внутреннего стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, имеет вид:

$$\text{cov}\{Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)\} = \gamma_{a_1 a_2}(s_1 - s_3) - \gamma_{a_1 b_1}(s_1 - s_2) - \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3),$$

где $s_i \in R$, $i = \overline{1, 3}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s \in R$, — взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, $a, b, a_1, a_2, b_1 = \overline{1, r}$.

Доказательство. Из свойств математического ожидания, принимая во внимание равенство $MY_a(s) = m$, $a = \overline{1, r}$, $s \in R$, имеем

$$\begin{aligned} D[Y_{a_1}(s_1) - Y_{a_2}(s_3)] &= D[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))] = \\ &= D[Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)] + D[Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)] + 2M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))]. \end{aligned}$$

Используя определение взаимной вариограммы, получаем требуемое. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольные приращения $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$, $Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)$, $s_i \in R$, $i = \overline{1, 4}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$, процесса $Y^r(s)$, $s \in R$.

Лемма 3. Ковариация приращений $Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)$ и $Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)$, $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$, действительного r — мерного внутреннего стационарного случайного процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, удовлетворяет соотношению

$$\text{cov}\{Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2), Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)\} = \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3) + \gamma_{a_1 b_2}(s_1 - s_4) - \gamma_{b_1 b_2}(s_2 - s_4) - \gamma_{a_1 a_2}(s_1 - s_3),$$

где $s_i \in R$, $i = \overline{1, 4}$, $\gamma_{ab}(s)$, $s \in R$, — взаимная семивариограмма процесса $Y^r(s)$, $s \in R$, $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$.

Доказательство. Легко видеть, что для любых фиксированных $a_1, b_2 = \overline{1, r}$

$$(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2)) + (Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3)) + (Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4)) = (Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_2}(s_4)).$$

Найдем дисперсию обеих частей последнего равенства. Используя определение взаимной вариограммы, запишем

$$\begin{aligned} &\gamma_{a_1 b_1}(s_1 - s_2) + \gamma_{b_1 a_2}(s_2 - s_3) + \gamma_{a_2 b_2}(s_3 - s_4) + M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))] + \\ &+ M[(Y_{a_1}(s_1) - Y_{b_1}(s_2))(Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4))] + M[(Y_{b_1}(s_2) - Y_{a_2}(s_3))(Y_{a_2}(s_3) - Y_{b_2}(s_4))] = \\ &= \gamma_{a_1 b_2}(s_1 - s_4). \end{aligned}$$

Учитывая утверждение леммы 2, получаем требуемый результат.

Рассмотрим далее действительный r — мерный внутренне стационарный гауссовский случайный процесс $X^r(s) = \{X_a(s), a = \overline{1, r}\}$, $s \in R$, $r \geq 1$, с нулевым математическим ожиданием $MX_a(s) = m_a = 0$, $a = \overline{1, r}$, $s \in R$, дисперсией σ^2 и неизвестной взаимной вариограммой

$$2\gamma_{AB}(H) = D\{X_A(S+H) - X_B(S)\}, A, B = \overline{1, r}, S, H \in R.$$

Заметим, что $\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h) \cdot \chi_1^2$, где χ_1^2 — случайная величина, распределенная по закону хи-квадрат с одной степенью свободы. Легко показать, что

$$M\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\gamma_{ab}(h).$$

$$D\{X_a(s+h) - X_b(s)\}^2 = 2\{2\gamma_{ab}(h)\}^2. \quad (1)$$

Используя определение коэффициента корреляции, утверждения лемм 1 и 3, имеем

$$\begin{aligned} \rho(\{X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t)\}^2, \{X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s)\}^2) &= \\ &= \{\rho(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))\}^2 = \\ &= \left\{ \frac{\gamma_{a_1 b_2}(t+h_1-s) + \gamma_{b_1 a_2}(t-s-h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(t+h_1-s-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(t-s)}{\sqrt{2\gamma_{a_1 b_1}(h_1)} \sqrt{2\gamma_{a_2 b_2}(h_2)}} \right\}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $X_a(1), X_a(2), \dots, X_a(n)$ — n последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(s)$, $a = \overline{1, r}$, $s \in R$, процесса $X'(s)$, $s \in R$. В качестве оценки взаимной вариограммы рассмотрим статистику вида

$$2\tilde{\gamma}_{ab}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X_a(s+h) - X_b(s))^2, \quad (3)$$

$h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$. Положим $\tilde{\gamma}_{ab}(-h) = \tilde{\gamma}_{ba}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, и $\tilde{\gamma}_{ab}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Найдем выражения для первых двух моментов оценки (3).

Теорема 1. Для оценки $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, заданной равенством (3), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} &= 2\gamma_{ab}(h), \\ \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} &= \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ &\times \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \{\gamma_{a_1 b_2}(t+h_1-s) + \gamma_{b_1 a_2}(t-s-h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(t+h_1-s-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(t-s)\}^2, \\ D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} &= \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{t,s=1}^{n-h} \{\gamma_{ab}(t+h-s) + \gamma_{ba}(t-s-h) - \gamma_{aa}(t-s) - \gamma_{bb}(t-s)\}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\gamma_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h \in R$, — взаимная семивариограмма процесса $X'(s)$, $s \in R$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = \overline{1, r}$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Из определения взаимной вариограммы и свойств математического ожидания, первое утверждение теоремы вытекает очевидным образом.

Используя определение ковариации, подставляя вместо $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ ее выражение в явном виде, получим

$$\begin{aligned} \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} &= \\ &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \text{cov}\{(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2, (X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2\}. \end{aligned}$$

Учитывая определение коэффициента корреляции, запишем

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \times$$

$$\times \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \rho\{(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2, (X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2\} \times \\ \times \sqrt{D(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t))^2} \sqrt{D(X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))^2}.$$

Применяя соотношение (1), утверждение леммы 1, имеем

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \frac{2\{2\gamma_{a_1 b_1}(h_1)\}\{2\gamma_{a_2 b_2}(h_2)\}}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ \times \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \{\rho(X_{a_1}(t+h_1) - X_{b_1}(t), X_{a_2}(s+h_2) - X_{b_2}(s))\}^2.$$

Из (2) следует требуемое равенство (4) для ковариации

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \frac{2\{2\gamma_{a_1 b_1}(h_1)\}\{2\gamma_{a_2 b_2}(h_2)\}}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ \times \sum_{t=1}^{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\gamma_{a_1 b_2}(t+h_1-s) + \gamma_{b_1 a_2}(t-s-h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(t+h_1-s-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(t-s)}{\sqrt{2\gamma_{a_1 b_1}(h_1)} \sqrt{2\gamma_{a_2 b_2}(h_2)}} \right\}^2.$$

Соотношение (5) для дисперсии оценки взаимной вариограммы нетрудно получить из (4), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$. Теорема доказана.

Исследуем асимптотическое поведение моментов второго порядка построенной оценки взаимной вариограммы $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = 0, n-1$, $a, b = 1, r$.

Теорема 2. Если имеет место соотношение

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma_{ab}(h)| < \infty, \quad (6)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \min\{h_1, h_2\}) \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \\ = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\gamma_{b_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2. \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-h) D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\gamma_{ba}(m-h) + \gamma_{ab}(m+h) - \gamma_{aa}(m) - \gamma_{bb}(m)\}^2, \quad (8)$$

где $\gamma_{ab}(h)$, $a, b = 1, r$, $h \in R$, — взаимная семивариограмма процесса $X'(s)$, $s \in R$, $a_1, a_2, b_1, b_2 = 1, r$, $h, h_1, h_2 = 0, n-1$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (4). Пусть $h_1 < h_2$. Сделаем замену переменных: $t=t$, $t-s=m$, тогда

$$\text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 b_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 b_2}(h_2)\} = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ \times \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^0 \sum_{t=1}^{m+n-h_2} \{\gamma_{b_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{h_2-h_1} \sum_{t=m+1}^{m+n-h_2} \{\gamma_{b_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 b_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{b_1 b_2}(m)\}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=h_2-h_1+1}^{n-h_1-1} \sum_{l=m+1}^{n-h_1} \left\{ \gamma_{h_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 h_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{h_1 h_2}(m) \right\}^2 \Bigg] = \\
& = \frac{2}{n-h_1} \sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left\{ \gamma_{h_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 h_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{h_1 h_2}(m) \right\}^2 - \\
& - \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{m=1}^{n-h_2-1} m \left\{ \gamma_{a_2 h_1}(m+h_2) + \gamma_{h_2 a_1}(m-h_1) - \gamma_{a_2 a_1}(m-h_1+h_2) - \gamma_{h_2 h_1}(m) \right\}^2 + \\
& + \left\{ \gamma_{h_1 a_2}(m-h_1) + \gamma_{a_1 h_2}(m+h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(m) - \gamma_{h_1 h_2}(m+h_2-h_1) \right\}^2 \Bigg].
\end{aligned}$$

Аналогично рассуждаем для случая $h_1 > h_2$.

$$\begin{aligned}
& \text{cov}\{2\tilde{\gamma}_{a_1 h_1}(h_1), 2\tilde{\gamma}_{a_2 h_2}(h_2)\} = \\
& = \frac{2}{n-h_2} \left[\sum_{m=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left\{ \gamma_{h_1 a_2}(m-h_2) + \gamma_{a_1 h_2}(m+h_1) - \gamma_{a_1 a_2}(m+h_1-h_2) - \gamma_{h_1 h_2}(m) \right\}^2 - \right. \\
& - \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{m=1}^{n-h_1-1} m \left\{ \gamma_{a_2 h_1}(m+h_1) + \gamma_{h_2 a_1}(m-h_2) - \gamma_{a_2 a_1}(m) - \gamma_{h_2 h_1}(m-h_1+h_2) \right\}^2 + \\
& \left. + \left\{ \gamma_{h_1 a_2}(m-h_1) + \gamma_{a_1 h_2}(m+h_2) - \gamma_{a_1 a_2}(m) - \gamma_{h_1 h_2}(m+h_2-h_1) \right\}^2 \right].
\end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты, учитывая (6), вытекает требуемое предельное соотношение (7) для ковариации.

Равенство (8) для дисперсии оценки взаимной вариограммы $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$ нетрудно получить из (7), если положить $h_1 = h_2 = h$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$.

Следствие. Из теоремы 2 вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} D\{2\tilde{\gamma}_{ab}(h)\} = 0$, $a, b = \overline{1, r}$, $h = \overline{0, n-1}$.

В силу первого утверждения теоремы 1 и вышеуказанного следствия получаем, что $2\tilde{\gamma}_{ab}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, $a, b = \overline{1, r}$, является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для взаимной вариограммы $2\gamma_{ab}(h)$, $a, b = \overline{1, r}$, $h \in R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендат. Дж. Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол. М.: Мир, 1983. 312с.
2. Марпл-мл., С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл-мл. М.: Мир, 1990. 584 с.
3. Cressie N. Statistics for Spatial Data / N. Cressie. New York: Wiley, 1991. 900 p.
4. Цеховая Т.В. Предельное распределение оценки вариограммы стационарного случайного процесса / Т.В. Цеховая // Вестник БГУ. Серия физ.-мат, №1. 2002. С. 104-105.
5. Tsekhavaya, T.V. Limiting Distribution of the Variogram Estimator / T.V. Tsekhavaya // Computer Data Analysis and Modeling. Complex Stochastic Data and Systems: Proceedings of the Eighth International Conference. Minsk, 2007. V.1. P.229-232.
6. Бриллинджер, Д. Временные ряды / Д. Бриллинджер. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с.
7. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н.Труш. Мн.: Белгосуниверситет, 1999. 218 с.
8. Цеховая, Т.В. Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса / Т.В. Цеховая // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: Материалы межд. мат. конф. Брест, 2005. С. 78-82.