ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ПРОВЕРКИ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРЕ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Ю. Харин, С. Ю. Чернов

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Минск, Беларусь
E-mail: KharinAY@bsu.by

В работе исследуется последовательный критерий отношения вероятностей при абсолютно непрерывных распределениях вероятностей наблюдений. Разработан подход, позволяющий с заданной точностью вычислять вероятности ошибок первого и второго рода. Теоретические результаты иллюстрируются вычислительными экспериментами.

Ключевые слова: последовательный критерий отношения вероятностей, простая гипотеза, ошибка первого рода, граничная цепь Маркова.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории статистической проверки параметрических гипотез количество наблюдений считается фиксированным заранее для каждой конкретной задачи. Существенной отличительной чертой *последовательной проверки гипотез* о параметрах наблюдаемого явления или процесса является то, что количество наблюдений, необходимых для принятия решения, зависит от исхода самих наблюдений и, следовательно, является не определенной заранее, а случайной величиной.

Необходимость использования такого подхода для принятия решений имеется во многих приложениях: в статистическом контроле качества [8], в биологии, в экономике и финансах [9].

Далее речь пойдет о последовательном критерии отношения вероятностей, предложенном А. Вальдом [1], вероятности ошибок этого критерия исследуются в работе. Точность данного критерия (вероятности ошибок первого и второго рода [5]) задается заранее, хотя на самом деле задаются величины, которые лишь приближенно равняются результирующим вероятностям ошибок. Поэтому встает вопрос о вычислении фактических значений вероятностей ошибочных решений при заданных порогах (параметрах) критерия.

Из-за сложности схемы принятия решений точные выражения указанных характеристик не получены даже для простейших моделей наблюдений, поэтому является актуальной задача их вычисления [9], [11]. Современные работы (например, [2],[4]) описывают алгоритмы приближенного нахождения искомых вероятностей ошибок для достаточно общего класса моделей, но не дают оценок точности вычислений. В данной работе приведен не только алгоритм получения оценок вероятностей ошибок I-го и II-го рода сверху и снизу, доказана сходимость этих оценок к истинным значениям, но и указана точность вычислений.

Полученные теоретические результаты иллюстрируются результатами вычислительных экспериментов и могут быть использованы при асимптотическом анализе робастности (устойчивости) [10] и построении робастных последовательных критериев [3], также применены на практике для вычисления значений вероятностей ошибочных решений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАБЛЮДЕНИЙ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots,\ x_t \in \mathrm{R}$, с плотностью распределения вероятностей $f(x,\theta)$. Относительно неизвестного значения параметра $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $\theta_0 < \theta_1$, имеются две простые гипотезы

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1. \tag{1}$$

Обозначим статистику накопленного логарифмического отношения правдоподобия:

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t, \tag{2}$$

где $\lambda_t = \ln \dfrac{f(x_t, \theta_1)}{f(x_t, \theta_0)}$.

Для проверки гипотез (1) по $n = 1,2,\ldots$ наблюдениям в соответствии с последовательным критерием отношения вероятностей [1] выносится решение:

$$d = d(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \Lambda_n \le C_-, \\ 1, & \Lambda_n \ge C_+, \\ 2, & \Lambda_n \in (C_-, C_+). \end{cases} \tag{3}$$

Решения $d = 0$ и $d = 1$ означают завершение наблюдений и принятие соответствующей гипотезы, а решение $d = 2$ – необходимость получения $(n+1)$-го наблюдения. В (3) C_-, C_+ – заданные (например, в соответствии с [1]) пороги (параметры) критерия:

$$C_- = \ln \frac{\beta_0}{1 - \alpha_0}, \quad C_+ = \ln \frac{1 - \beta_0}{\alpha_0},$$

где α_0, β_0 – максимально допустимые значения вероятностей ошибок I-го и II-го рода.

Будем рассматривать широко используемый на практике случай гауссовской (нормальной) модели наблюдений:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}. \tag{4}$$

Тогда слагаемые в статистике (2) преобразуются к виду:

$$\lambda_t = (\theta_1 - \theta_0)\left(x_t - \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) = \Delta\left(x_t - \theta_0 - \frac{\Delta}{2}\right), \tag{5}$$

где $\Delta = \theta_1 - \theta_0 > 0$ – величина, характеризующая меру различия проверяемых гипотез.

Далее предполагаем, что истинной гипотезой является H_0 (случай H_1

рассматривается аналогично), поэтому речь пойдет о вероятности ошибки первого рода.

Как уже отмечено во введении, α_0, β_0 лишь приближенно равняются результирующим вероятностям ошибок первого и второго рода. Поэтому задача состоит в построении с указанной точностью приближенных выражений для фактических значений вероятностей ошибок первого и второго рода при заданных порогах критерия.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Разобьем интервал (C_-, C_+) между порогами на m подмножеств-полосок толщиной $h = \dfrac{C_+ - C_-}{m}$, где $m \in \mathrm{N}$ – параметр разбиения (аппроксимации). Пусть

$$\Lambda_n^- = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^-,$$

где

$$\lambda_1^- = C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right]h, \qquad \lambda_i^- = \left[\frac{\lambda_i}{h}\right]h, \quad i \geq 2. \tag{7}$$

Случайная последовательность, Λ_n^- – цепь Маркова (она имеет независимые приращения). Вместе с Λ_n^- будем рассматривать новую цепь Маркова $\widetilde{\Lambda}_n^-$ со множеством состояний $\{0,1,\ldots,m+1\}$, у которой два поглощающих состояния: 0 и $m+1$:

$$0: \quad \Lambda_n^- \in (-\infty, C_- - h],$$

$$\ldots\ldots$$

$$i: \quad \Lambda_n^- = C_- + (i-1)h, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\ldots\ldots$$

$$m+1: \quad \Lambda_n^- \in [C_+, \infty).$$

Теорема 1. Для представленной выше модели наблюдений в предположении (5) вектор вероятностей начальных состояний и матрица вероятностей перехода поглощающей цепи Маркова $\widetilde{\Lambda}_n^-$ вычисляются поэлементно следующим образом:

$$\pi_i^- = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_- + ih}{\Delta}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_- + (i-1)h}{\Delta}\right),$$

$$\pi_0^- = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_-}{\Delta}\right), \qquad \pi_{m+1}^- = 1 - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_+}{\Delta}\right)$$

$$p_{i,j}^- = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i+1}{\Delta}h\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right),$$

$$p_{i,0}^- = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{1-i}{\Delta}h\right), \quad p_{i,m+1}^- = 1 - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{m-i+1}{\Delta}h\right), \quad i,j = \overline{1,m},$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального закона.

Доказательство. Рассмотрим i-й элемент вектора начальных состояний, $i = \overline{1,m}$.

$$\pi_i^- = P\left(\lambda_1^- = C_- + (i-1)h\right) = P\left(C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right]h = C_- + (i-1)h\right) =$$

$$= P\left(\left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right] = i - 1\right).$$

Воспользуемся определением целой части, а затем нормальностью наблюдений (5):

$$\pi_i^- = P\left((i-1)h \le \lambda_1 < ih\right) = P\left((i-1)h \le \Delta\left(x_t - \theta_0 - \frac{\Delta}{2}\right) < ih\right) =$$

$$= P\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{(i-1)h}{\Delta} \le x_t - \theta_0 < \frac{\Delta}{2} + \frac{ih}{\Delta}\right) = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{ih}{\Delta}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{(i-1)h}{\Delta}\right).$$

Вероятности π_0^- и π_{m+1}^- вычисляются аналогично элементам вектора π^-.

Рассмотрим вероятность перехода цепи $\widetilde{\Lambda}_n^-$ из i-го состояния в j-е:

$$p_{i,j}^- = P\left(\Lambda_{n+1}^- = C_- + (j-1)h \mid \Lambda_n^- = C_- + (i-1)h\right) = P\left(\lambda_{n+1}^- = (j-i)h\right)$$

в силу независимости приращений. Воспользуемся (7), а затем (5) и (4):

$$p_{i,j}^- = P\left(\left[\frac{\lambda_{n+1}}{h}\right] = j - i\right) = P\left((j-i)h \le \lambda_{n+1} < (j-i+1)h\right) =$$

$$= P\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h \le x_t - \theta_0 < \frac{\Delta}{2} + \frac{j-i+1}{\Delta}h\right) = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i+1}{\Delta}h\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right).$$

Элементы $p_{i,0}^-$ и $p_{i,m+1}^-$, $i = \overline{1,m}$ вычисляются аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, получены явные формулы для вычисления переходных и начальных вероятностей цепи Маркова $\widetilde{\Lambda}_n^-$, которые будут использоваться для дальнейших вычислений

Для удобства представления введем блочную структуру: матрицы $P^- \in \mathrm{R}^{m \times m}$ и $R^- \in \mathrm{R}^{m \times 2}$ такие, что $(P^-)_{i,j} = p_{ij}^-$, $(R^-)_{i,1} = p_{i,0}^-$, $(R^-)_{i,2} = p_{i,m+1}^-$, $i, j = \overline{1,m}$.

Аналогично тому, как построена случайная последовательность Λ_n^-, строится цепь Маркова Λ_n^+:

$$\Lambda_n^+ = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^+, \quad \text{где} \quad \lambda_1^+ = C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right]h + h, \qquad \lambda_t^+ = \left[\frac{\lambda_t}{h}\right]h + h, \quad t \ge 2.$$

Обозначим состояния $\widetilde{\Lambda}_n^+$ следующим образом (0 и $m+1$ – поглощающие):

$$0 : \Lambda_n^+ \in (-\infty, C_-], \ldots, \; i : \Lambda_n^+ = C_- + ih, \ldots, \; m+1 : \Lambda_n^+ \in [C_+ + h, \infty), \; i = \overline{1,m}.$$

Теорема 2. Для представленной выше модели наблюдений в предположении (5) вектор вероятностей начальных состояний и матрица вероятностей перехода поглощающей цепи Маркова $\widetilde{\Lambda}_n^+$ вычисляются поэлементно следующим образом:

$$\pi_i^+ = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_- + ih}{\Delta}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_- + (i-1)h}{\Delta}\right),$$

$$\pi_0^+ = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_-}{\Delta}\right), \qquad \pi_{m+1}^+ = 1 - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{C_+}{\Delta}\right)$$

$$p_{i,j}^+ = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i-1}{\Delta}h\right),$$

$$p_{i,0}^+ = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} - \frac{i}{\Delta}h\right), \qquad p_{i,m+1}^+ = 1 - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{m-i}{\Delta}h\right), \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1.

Обозначим $\pi_0 = \pi_0^- = \pi_0^+$, $\pi_{m+1} = \pi_{m+1}^- = \pi_{m+1}^+$, $\pi = \pi^- = \pi^+$. Переходные вероятности p_{ij}^+ сгруппируем в матрицы $P^+ \in \mathrm{R}^{m\times m}$ и $R^+ \in \mathrm{R}^{m\times 2}$. Отметим, что построенные матрицы $P^\pm$ – теплицевы и для работы с ними (например, для обращения) можно использовать специальные алгоритмы [7], позволяющие существенно ускорить вычислительные эксперименты.

Построенные случайные последовательности Λ_n^- и Λ_n^+ являются однородными цепями Маркова с конечным числом состояний. Поэтому для последовательных критериев, построенных по этим цепям, с использованием [2] можно получить точные значения вероятностных характеристик. Цепи Маркова Λ_n^- и Λ_n^+ будем в дальнейшем называть ***граничными цепями***.

Теорема 3. В рассматриваемой выше модели цепи Маркова Λ_n^-, Λ_n и Λ_n^+ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\Lambda_n^- \le \Lambda_n \le \Lambda_n^+, \ \forall n \in \mathrm{N}.$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАНИЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Пусть $O_{p\times q}(h^k)$ – $p\times q$ матрица, каждый элемент которой может быть записан в виде $O(h^k)$, $h \to 0$.

Лемма 1. Для модели наблюдений (5) матрицы $P^\pm$ и $R^\pm$ удовлетворяют в асимптотике $h \to 0$ следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} P^+ - P^- &= O_{m\times m}(h^2), \\ R^+ - R^- &= O_{m\times 2}(h). \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(y) = (1/\sqrt{2\pi})\exp\{-y^2/2\}$; (ij)-й элемент матрицы P^+ по Теореме 2 равен $p_{ij}^+ = \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) - \Phi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i-1}{\Delta}h\right) = \int_{\frac{\Delta}{2}+\frac{j-i}{\Delta}h}^{\frac{\Delta}{2}+\frac{j-i-1}{\Delta}h} \varphi(y)dy.$

Воспользуемся формулой средних прямоугольников, а затем разложим функцию $\varphi(\cdot)$ в ряд Тейлора:

$$p_{ij}^+ = \frac{h}{2\Delta}\varphi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h - \frac{h}{2\Delta}\right) + O(h^3) =$$

$$\frac{h}{2\Delta}\varphi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) - \left(\frac{h}{2\Delta}\right)^2 \varphi'\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) + O(h^3).$$

Аналогично для (ij)-го элемента матрицы P^-:

$$p_{ij}^- = \frac{h}{2\Delta} p\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) + \left(\frac{h}{2\Delta}\right)^2 p'\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) + O(h^3).$$

Учитывая, что $\varphi'\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) = \varphi'\left(\frac{\Delta}{2}\right) + O(h)$, найдем $(P^+ - P^-)_{ij}$.

$$p_{ij}^+ - p_{ij}^- = -2\left(\frac{h}{2\Delta}\right)^2 \varphi'\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{j-i}{\Delta}h\right) + O(h^3) = -2\left(\frac{h}{2\Delta}\right)^2 \varphi'\left(\frac{\Delta}{2}\right) + O(h^3) = O(h^2).$$

Поэтому, по определению, $P^+ - P^- = O_{m\times m}(h^2)$. Аналогично, $R^+ - R^- = O_{m\times 2}(h)$.

Замечание. Утверждение леммы останется справедливым для любой дважды непрерывно дифференцируемой плотности распределения вероятностей наблюдений.

Следствие 1. В условиях Леммы 1

$$P^{\pm} = O_{m\times m}(h),\ R^{\pm} = O_{m\times 2}(1),\ \pi^{\pm} = O_{1\times m}(h). \tag{9}$$

Лемма 2. В условиях Леммы 1 для матриц P^- и P^+ в асимптотике $h \to 0$ имеет место соотношение

$$(I - P^+)^{-1} - (I - P^-)^{-1} = O_{m\times m}(h^2). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = (1-\lambda)^{-1}$, $|\lambda| < 1$, и разложим ее в ряд Тейлора в точке 0 с остаточным членом в форме Лагранжа: $g(\lambda) = 1 + \frac{1}{(1-\xi)^2}\lambda, |\lambda| < 1$, где ξ – некоторое число между 0 и λ. Так как все характеристические числа матриц $P^{\pm}$ по модулю меньше 1 [6], то значения функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ определены и совпадают на спектрах матриц $P^{\pm}$. Следовательно,

$$f(P^+) = g(P^+) = I + \frac{1}{(1-\xi)^2}P^+ \text{ и } f(P^-) = g(P^-) = I + \frac{1}{(1-\xi)^2}P^-.$$

С другой стороны $\quad (I - P^+)^{-1} - (I - P^-)^{-1} = f(P^+) - f(P^-) = \frac{1}{(1-\xi)^2}(P^+ - P^-).$

По Лемме 1: $P^+ - P^- = O_{m\times m}(h^2)$, поэтому $(I - P^+)^{-1} - (I - P^-)^{-1} = O_{m\times m}(h^2)$. Лемма 2 доказана.

Пусть α_m^- и α_m^+ – вероятности ошибок первого рода последовательных критериев отношения вероятностей, в которых вместо статистики Λ_n используются цепи Маркова Λ_n^- и Λ_n^+ соответственно.

Теорема 4. Для модели наблюдений (5) величины α_m^-, α и α_m^+ удовлетворяют соотношению

$$\alpha_m^- \le \alpha \le \alpha_m^+.$$

Доказательство. Обозначим $\tau_1^- = \min\{n : \Lambda_n^- \ge C_+\}$, $\tau_1 = \min\{n : \Lambda_n \ge C_+\}$, $\tau_0^- = \min\{n : \Lambda_n^- \le C_- - h\}$, $\tau_0 = \min\{n : \Lambda_n \le C_-\}$. Докажем неравенство $\alpha_m^- \le \alpha$. По Теореме 3: $\Lambda_n^- \le \Lambda_n$, поэтому $(\tau_1^- \le \tau_0^-) \subseteq (\tau_1 \le \tau_0)$ и $\alpha_m^- = P(\tau_1^- \le \tau_0^-) \le P(\tau_1 \le \tau_0) = \alpha$. Неравенство $\alpha \le \alpha_m^+$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

В качестве оценки приближенного значения α принимается величина $\hat{\alpha}_m = \frac{1}{2}\left(\alpha_m^+ + \alpha_m^-\right)$, т.е. середина отрезка $[\alpha_m^-, \alpha_m^+]$.

Теорема 5. Для модели наблюдений (5), величины α_m^- и α_m^+ удовлетворяют соотношению

$$\alpha_m^+ - \alpha_m^- = O(h).$$

Доказательство. Пусть $R_j^\pm$ – j-й столбец матриц $R^\pm$, $j=1,2$. Тогда по определению $\alpha_m^+ = P(\Lambda_n^+ \geq C_+ + h \mid H_0) = \pi_{m+1} + \pi\left(I - P^+\right)^{-1} R_2^+$. и $\alpha_m^- = \pi_{m+1} + \pi\left(I - P^-\right)^{-1} R_2^-$.

Далее,

$$\alpha_m^+ - \alpha_m^- = \pi\left((I-P^+)^{-1} - (I-P^-)^{-1}\right)R_2^+ + \pi\left(I - P^-\right)^{-1}\left(R_2^+ - R_2^-\right).$$

Воспользуемся (8), (9), (10):

$$\alpha_m^+ - \alpha_m^- = O_{1\times m}(h)O_{m\times m}(h^2)O_{m\times 1}(1) + O_{1\times m}(h)(I + O_{m\times m}(h))O_{m\times 1}(h) = O(h).$$

Теорема доказана. Таким образом, α_m^+ стремится к истинному значению вероятности ошибки первого рода сверху, а α_m^- – снизу.

Следствие 2. Оценка $\hat{\alpha}_m$ стремится к значению вероятности ошибки первого рода последовательного критерия, основанного на цепи Маркова Λ_n, со скоростью $O(h)$, причем отклонение от этого значения не превосходит половины длины отрезка $[\alpha_m^-, \alpha_m^+]$:

$$|\alpha - \hat{\alpha}_m| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_m^+ - \alpha_m^-\right).$$

Доказательство. Рассмотрим уклонение

$$|\alpha - \hat{\alpha}_m| = \left|\alpha - \frac{\alpha_m^+ + \alpha_m^-}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|\alpha - \alpha_m^+| + |\alpha - \alpha_m^-|\right).$$

Так как $\alpha_m^- \leq \alpha \leq \alpha_m^+$, то

$$|\alpha - \hat{\alpha}_m| = \left(\alpha_m^+ - \alpha + \alpha - \alpha_m^-\right)/2 = \left(\alpha_m^+ - \alpha_m^-\right)/2 = O(h).$$

Следствие 2 доказано.

Таким образом, доказана не только сходимость оценки $\hat{\alpha}_m$ к истинному значению вероятности ошибки первого рода для последовательного критерия, основанного на цепи Маркова Λ_n, но и указана максимальная погрешность (а также ее порядок) такого приближения.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проведения вычислительных экспериментов были написаны компьютерные программы на языке C++ и в пакете Mathematica 6.0. Все эксперименты проводились для случая $\alpha_0 = \beta_0 = 0.1$. Истинной гипотезой во всех экспериментах была гипотеза H_0.

Обозначим через $\hat{\alpha}_{MC}$ оценку вероятности ошибки I-го рода последовательного критерия отношения вероятностей (ПКОВ), основанного на цепи Маркова Λ_n, полученную имитационным моделированием усреднением за 5 000 000 критериев. Вычислительные эксперименты проводились для случая

$$f(x,\theta) = (1/\sqrt{2\pi})\exp\{-(x-\theta)^2/2\}.$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 1, в которой показана зависимость от m и Δ вероятностей ошибок первого рода для ПКОВ, основанных на исходной и граничных цепях Маркова. Эксперименты показывают, что оценка $\hat{\alpha}_m$ стремится к α – значению вероятности ошибки первого рода для ПКОВ, основанном на цепи Маркова Λ_n, а также, что α лежит между α_m^- и α_m^+ – значениями вероятностей ошибок первого рода для ПКОВ, основанных на граничных цепях Маркова. Таким образом, иллюстрируются теоретические результаты, полученные в данной работе.

Зависимость вероятностей ошибок первого рода от m *Таблица 1*

Δ	m	α_m^-	$\hat{\alpha}_m$	$\hat{\alpha}_{MC}$	α_m^+	$(\alpha_m^+ - \alpha_m^-)/2$
1,5	100	0.04352	0.04505	0.04474	0.04657	0.001525
	500	0.04470	0.04501		0.04531	0.000305
	1000	0.04485	0.04500		0.04515	0.00015
1,0	500	0.05762	0.05869	0.05843	0.05976	0.00107
	1000	0.05814	0.05868		0.05922	0.00054
	2000	0.05841	0.05868		0.05895	0.00027
0,5	1000	0.07384	0.07675	0.07667	0.07966	0.00291
	2000	0.07525	0.07671		0.07817	0.00146
	3000	0.07573	0.07670		0.07767	0.00097
0,3	1000	0.07692	0.08576	0.08535	0.09460	0.00884
	2000	0.08104	0.08545		0.08986	0.00441
	3000	0.08245	0.08539		0.08833	0.00294
0,2	2000	0.08022	0.09053	0.08993	0.10084	0.01031
	3000	0.08336	0.09023		0.09710	0.00687
	4000	0.08498	0.09013		0.09527	0.00515

Для $\Delta = 0.5$ сходимость величин α_m^+ и α_m^- к $\hat{\alpha}_{MC}$ представлена графически на рис.1.

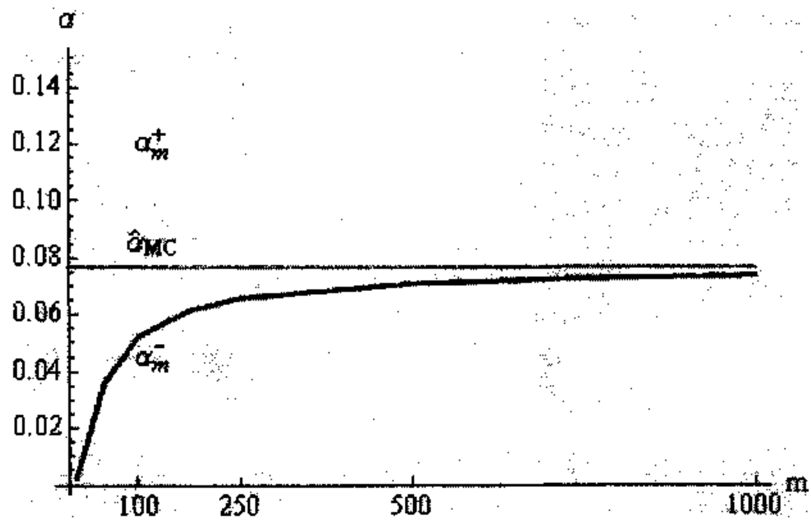

Рис.1. Зависимость от m вероятностей ошибок I-го рода для ПКОВ, основанных на исходной и граничных цепях Маркова

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вальд, А.* Последовательный анализ. / А. Вальд. М.: Наука, 1960.
2. *Харин, А.Ю.* Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез / А.Ю. Харин // Вестник БГУ, 2002, Сер. 1, №1.
3. *Kharin, A.* On Robustifying of Sequential Probability Ratio Test for a Discrete Model under "Contraminations" / A. Kharin // Austrian Jornal of Statistics. 2002. V. 31. №. 4. P. 267–277.
4. *Kharin, A.* Robust Sequential Testing of Hypotheses on Discrete Probability Distributions / A. Kharin, D. Kishilau // Austrian Jornal of Statistics. 2005. V. 34. № 2. P. 153–162.
5. *Гнеденко, Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. М.: Наука, 1988. 448 с.
6. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
7. *Воеводин, В.В.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами / В.В. Воеводин, Е.Е. Тыртышников. М: Наука, 1987. 320 с.
8. *Ghosh, B.K.* Handbook of Sequential Analysis / B.K. Ghosh, P.K. Sen. New York: Marcel Dekker, 1991. 638 p.
9. *Lai, T.L.* Sequential Analysis: Some classical problems and new challenges / T.L. Lai. Statistica Sinica, 2001. V. 11. P. 303–408.
10. *Хьюбер, П.* Робастная статистика / П. Хьюбер. М.: Мир, 1984. 294 с.
11. *Чернов, С.Ю.* Об оценивании вероятностных характеристик последовательного критерия проверки простых гипотез. / С.Ю. Чернов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях. Материалы XI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов. Гомель, 2008. С. 193–194.