СОСТАВЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ ПЛАНОВ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В. В. Тур, Д. М. Марковский

Брестский государственный технический университет
Брест, Беларусь
E-mail: vvtur@bstu.by,
markouski@tut.by

В статье описан принцип назначения контрольных нагрузок при испытании железобетонных конструкций. Предложена стратегия определения рекомендуемого количества испытаний, учитывающая как риски потребителя, так и риски изготовителя. При этом учитываются вынужденные запасы прочности исходных материалов, возникающие вследствие консервативности оценочных процедур при приемочном контроле материалов. Для оценки изменчивости случайной прочности конструкций, а также для оценки влияния вынужденных запасов прочности исходных материалов использована вероятностная модель прочности нормальных сечений железобетонных конструкций.

Ключевые слова: контрольная нагрузка, надежность, Монте-Карло, коэффициент вариации, нецентральное распределение Стьюдента.

ВВЕДЕНИЕ

Применение показателей надежности к изделиям предполагает возможность их экспериментальной проверки, например, контрольными испытаниями, в ходе которых количественно оцениваются те или иные свойства изделий. При испытании конструктивных элементов нагружением основным вопросом является назначение контрольных нагрузок и необходимого количества испытаний.

Испытания строительных конструкций характеризуются относительно высокой стоимостью их выполнения, при этом изделия, как правило, доводятся до разрушения. Это предопределяет заинтересованность в максимальном снижении требуемого количества испытаний и побуждает рассматривать факторы, не учитываемые при проектировании конструкций, но увеличивающие их действительную прочность.

Методы выборочного контроля в большинстве действующих стандартов и рекомендаций, как правило, основаны на построении доверительных интервалов для различных статистик. Поэтому чем больше результатов испытаний, тем более узким оказывается доверительный интервал, и тем менее консервативной будет оценка качества изделий. Существует определенный парадокс: чем выше уровень качества изделий, тем сложнее его подтвердить. Сложность состоит еще и в том, что вероятность отказа строительных конструкций имеет порядок $p = 10^{-3}$, однако количество испытаний, как правило, не должно превышать 3-5 из экономических соображений.

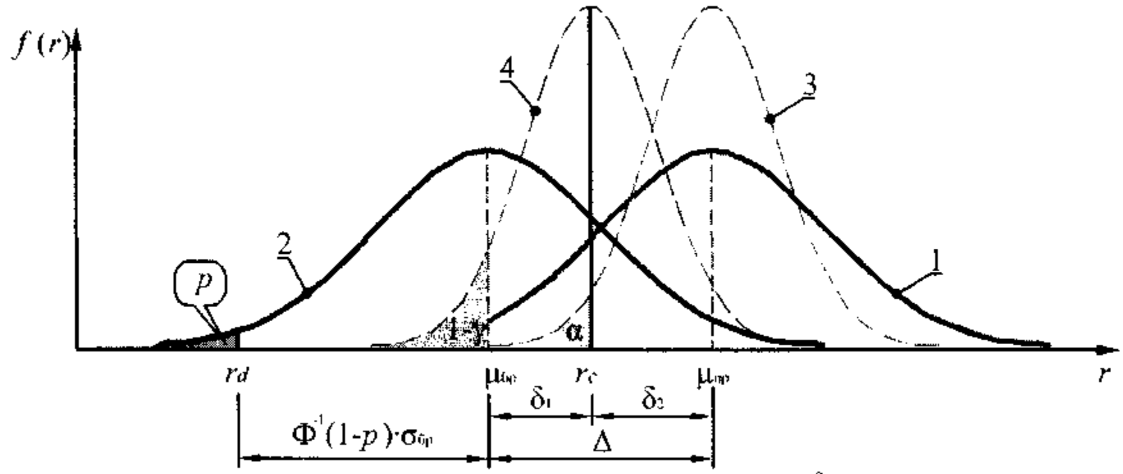
ПРИНЦИП НАЗНАЧЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Предполагается, что каждое испытание завершается при достижении конструкцией предельного состояния, при этом контролируется среднее значение выборки. Партия конструкций считается годной, если среднее значение испытательной нагрузки $\bar{\mu}$ в "n" испытаниях больше контрольной $r_c = c \cdot r_d$.

Для ситуации, когда несущая способность конструкции имеет нормальное распределение, значение контрольной нагрузки при оценке надежности по выборочному среднему определяется по следующему правилу:

$$r_c = r_d - \Phi^{-1}(p) \cdot \sigma - \Phi^{-1}(1-\gamma) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (1)$$

Третье слагаемое в данной формуле учитывает γ – задаваемый *a priori* доверительный уровень того, что действительное выборочное среднее разрушающей нагрузки окажется не ниже его γ-нижней границы (см. рис.1). Иначе, величина $\beta = (1 - \gamma)$ – риск потребителя – вероятность принять негодную партию изделий, для которой гарантированное значение прочности, соответствующее p-квантили, ниже декларируемого расчетного значения r_d (ошибка второго рода).



1 – плотность действительного распределения прочности элементов $N(\mu_{пр}, \sigma^2_{пр})$;
2 – плотность такого распределения прочности $N(\mu_{бр}, \sigma^2_{бр})$ истинное значение p-квантили которого совпадает с декларируемым расчетным значением прочности r_d;
3 – плотность распределения выборочных оценок среднего значения прочности, если элементы отбираются из совокупности с законом распределения $N(\mu_{пр}, \sigma^2_{пр})$;
4 – плотность распределения выборочных оценок среднего значения прочности, при котором $\mu_{бр}$ является нижней γ-границей доверительного интервала

Рис.1. – Распределения прочности изделий и выборочных оценок среднего значения

Пусть $\mu_{бр}$ и $\sigma^2_{бр}$ – браковочные значения математического ожидания и дисперсии случайной прочности элементов, которые связаны с таким распределением вероятностей, p_f-квантиль которого равна расчетной (декларируемой) прочности r_d. Согласно формуле (1) контрольная нагрузка r_c назначается с учетом доверительного уровня γ и поэтому превышает $\mu_{бр}$ на величину

$$\delta_1 = -\Phi^{-1}(1-\gamma)\frac{\sigma_{бр}}{\sqrt{n}}. \qquad (2)$$

Если действительное распределение прочности будет соответствовать декларируемому, то вероятность принять партию изделий будет менее 0.5. Поэтому оно должно быть смещено относительно декларируемого на некоторую величину Δ, складывающуюся из отрезков δ_1 и δ_2. При этом величина δ_2 зависит от принятого значения α – риска изготовителя, соответствующего вероятности отклонить годную партию изделий (ошибка первого рода).

Справедливо следующее равенство:

$$r_c = \mu_{бр}\left(1 - \frac{V_{бр}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\gamma)\right) = \mu_{пр}\left(1 + \frac{V_{пр}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\alpha)\right). \quad (3)$$

Отсюда n, необходимое для ограничения рисков изготовителя и потребителя:

$$n = \left[\frac{V_{бр}\left(-\Phi^{-1}(1-\gamma) - (\mu_{пр}/\mu_{бр})(V_{пр}/V_{бр})\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\mu_{пр}/\mu_{бр} - 1}\right]^2. \quad (4)$$

Таким образом, зная отношения средних значений и коэффициентов вариации приемочных к браковочным, а также значение коэффициента вариации $V_{бр}$ для случайной величины, имеющей распределение $N(\mu_{бр}, \sigma^2{}_{бр})$, можно вычислить рекомендуемое количество n.

ВЫЯВЛЕНИЕ КОНСЕРВАТИВНОСТИ КОНТРОЛЬНЫХ ПРОЦЕДУРПРИ ПРИЕМКЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Строительные материалы, предназначенные для изготовления конструкций, подвергаются входному выборочному контролю для оценки некоторого параметра качества r. Например, этим параметром может быть нормативное значение предела текучести арматурной стали либо прочности бетона. *Нормативным значением* r_k некоторого свойства принято называть такое его значение, которое является гарантированным с обеспеченностью (1-p) для генеральной совокупности. Иными словами, нормативное значение является p-квантилью распределения случайной величины R:

$$P[R \le r_k] = p. \quad (5)$$

Для строительных материалов, как правило, назначают $p = 0.05$.

Для оценки r_k по результатам тестирования случайной выборки $r_1, r_2 \ldots r_n$ вычисляют точечные оценки: выборочное среднее r_m и выборочную дисперсию s^2. Выборочное значение r_m является реализацией случайной переменной $R_m \sim N(\mu,\sigma^2/n)$. Выборочная дисперсия s^2 является реализацией случайной переменной S^2, независимой от R_m. Согласно документу ISO 12491 [1] для строительных материалов нормативное значение по выборочным данным оценивают по следующему правилу

$$r_{sk} = r_m + k(p, \gamma, n)\cdot s \quad (6)$$

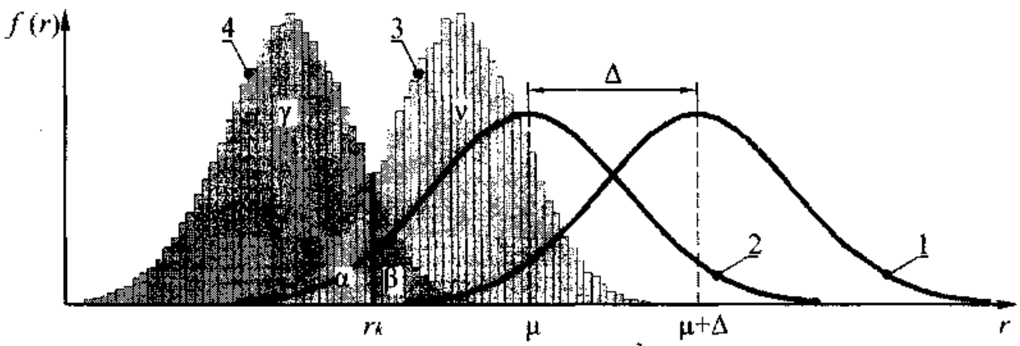
где r_{sk} – реализация случайной переменной $R_{sk} = R_m + k(p, \gamma, n)\cdot S$;

$k(p, \gamma, n)$ – коэффициент, зависящий от допустимой доли брака p, доверительной вероятности γ, количества испытанных элементов n, который бы гарантировал выполнение условия $P[R_{sk} \le r_k] = \gamma$.

В приведенном правиле назначения нормативного значения учитывается лишь заранее оговоренный *риск потребителя* $\beta = (1-\gamma)$, в интересах которого выгодно повышать γ. Однако уже при $\gamma \geq 0.5$ выполненная по формуле (6) оценка либо будет заниженной по сравнению с действительной p-квантилью распределения, либо при сравнении с истинной нормативной прочностью, которую требуется подтвердить, будет приводить к браковке партии в более 50% случаев. Собственно говоря, от такого консерватизма никуда не уйти, но в данном разделе мы попытаемся оценить "осторожность", свойственную применяемым методикам выборочного контроля.

Таким образом, в большинстве случаев **невозможно подтвердить истинный уровень качества всей партии изделий, не прибегая к сплошному контролю**, а лишь основываясь на ограниченном количестве испытаний. В такой постановке задачи применяется принцип раздельного управления рисками изготовителя и потребителя. Снижение одного риска ведет к такому же увеличению другого. Поэтому для возможности управлять рисками изготовителя α и потребителя β совместно, необходимо, чтобы декларируемый изготовителем уровень качества был ниже истинного уровня качества. Графическая интерпретация, а также соотношения рисков и доверительных уровней показаны на рис.2.

Практика показывает, что изменчивость прочности бетона и арматуры практически не зависит от среднего значения. Поэтому в дальнейших расчетах дисперсии действительного распределения и декларируемого будут считаться равными.



1 – действительное распределение прочности элементов $N(\mu+\Delta, \sigma^2)$;
2 – такое распределение прочности $N(\mu, \sigma^2)$, истинное нормативное значение которого совпадает с декларируемым r_k;
3 – распределение выборочных оценок нормативного значения R_{sk}, если элементы отбираются из совокупности $N(\mu+\Delta, \sigma^2)$;
4 – распределение выборочных оценок нормативного значения, если элементы отбираются из совокупности $N(\mu, \sigma^2)$. Требуется для нахождения коэффициента $k(p, \gamma, n)$

Рис.2. – Распределения прочности изделий и выборочных оценок нормативного значения

Поскольку риски потребителя регулируются выбором $k(p, \gamma, n)$, то риски изготовителя можно регулировать, управляя действительным средним значением прочности материалов ($\mu+\Delta$), при этом Δ является константой. Партия будет признаваться годной каждый раз, когда будет выполнено условие:

$$r_m + \Delta + k(p, \gamma, n)\cdot s \geq r_k = \mu + \Phi^{-1}(p)\cdot\sigma. \qquad (7)$$

Если задан риск производителя α, то должно выполняться условие:

$$P\left[R_{sk} \leq r_k\right] = \alpha. \qquad (8)$$

Левая часть уравнения может быть записана иначе

$$P\left[R_m + \Delta + k(p,\gamma,n)\cdot S \leq \mu + \Phi^{-1}(p)\cdot\sigma\right] = P\left[\frac{\dfrac{R_m - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \sqrt{n}\left(\dfrac{\Delta}{\sigma} - \Phi^{-1}(p)\right)}{S/\sigma} \leq k(p,\gamma,n)\sqrt{n}\right] \qquad (9)$$

Известно, что если случайная переменная U имеет стандартное нормальное распределение, а случайная переменная Z, независимая от U, распределена по закону χ^2 с n степенями свободы, то случайная переменная $T = (U+\lambda)/\sqrt{Z/n}$ имеет нецентральное распределение Стьюдента с n степенями свободы и параметром нецентральности λ.

Учитывая, что $(R_m - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ имеет стандартное нормальное распределение, а величина $(n\text{-}1)s^2/\sigma^2$ имеет χ^2-распределение с $(n\text{-}1)$ степенями свободы, можно заключить, что дробь в выражении (9) имеет нецентральное распределение Стьюдента $t(n\text{-}1, \lambda)$ с параметром нецентральности $\lambda = \sqrt{n}\left(\Delta/\sigma - \Phi^{-1}(p)\right)$. Неизвестное значение λ подбирается таким образом, чтобы число $k(p,\gamma,n)\sqrt{n}$ являлось α-квантилью распределения $t(n\text{-}1, \lambda)$, как показано на рис. 3, по которому также видна взаимосвязь параметров α, β, $k(p, \gamma, n)$ и Δ.

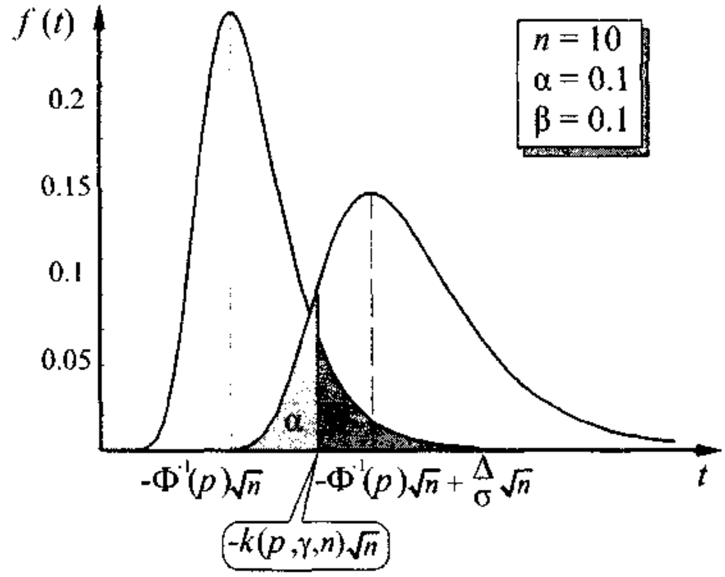


Рис.3. Распределения Стьюдента для определения параметров $k(p, \gamma, n)$ и Δ

Зная $k(p, \gamma, n)$ и λ остается вычислить минимальное значение Δ:

$$\Delta = \sigma \cdot \left(\lambda/\sqrt{n} + \Phi^{-1}(p)\right). \tag{10}$$

Следует отметить, что согласно приведенной методике величина Δ не зависит от μ и прямо пропорциональна σ. Таким образом, для различных классов арматуры и бетона можно вычислить приращения Δ в зависимости от количества испытаний n, обеспеченности нормативного значения $(1\text{-}p)$, рисков изготовителя α и потребителя β. В стандарте по арматуре СТБ 1704 [2] указаны следующие значения: $p = 0.05$, $\gamma = 0.9$, количество испытаний и риск изготовителя не регламентированы.Поэтому для прочностных свойств арматуры можно принимать следующие параметры:

– для предела текучести арматуры $\Delta f_{sy} = 1.3\sigma_{fsy} \approx 40$ МПа ($n = 15$, $p = 0.05$, $\alpha = \beta = 0.1$)

– для временного сопротивления $\Delta f_{su} = 1.11\sigma_{fsu} \approx 45$ МПа ($n = 15$, $p = 0.10$, $\alpha = \beta = 0.1$)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

Нелинейная деформационная модель определения прочности нормальных сечений железобетонных элементов, закрепленная нормами СНБ 5.03.01 [3], основана на принципах нелинейной механики и включает:

1) уравнения равновесия внутренних и внешних сил;

2) законы распределения относительных деформаций для рассчитываемого сечения (гипотеза плоских сечений);

3) физические уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и относительными деформациями материалов в процессе нагружения (диаграммы деформирования материалов).

При расчете прочности железобетонных конструкций принимают, что часть переменных имеют вероятностный характер, а остальные имеют детерминированные значения. К базисным согласно [4] относят переменные, приведенные в таблице 1.

Таблица 1

Статистические параметры базисных переменных

Базисная переменная	**Закон распределения**	**μ**	**σ**
предел текучести f_{sy} арматуры, МПа	LN	$S_{0.95} + 1.645 \cdot \sigma$	30
прочность бетона f_{cm}, МПа	LN	$C_{0.95} + 1.645 \cdot \sigma$	5
ширина сечения b, мм	N	*nom*	5
высота сечения H, мм	N	*nom*	5
защитный слой c, мм	N	$0.15\,H$	5

В общем случае коэффициент вариации V_R случайной прочности конструкций может быть определен по результатам статистических испытаний (симуляций Монте-Карло) при использовании вероятностной модели прочности конструкций со статистическими параметрами базисных переменных, соответствующими условиям производства. Так, при наличии организованной системы контроля качества бетона, арматуры или геометрических характеристик изделий в распоряжении производителя всегда есть данные о средней прочности с ее стандартным отклонением. При заданных (или установленных опытным путем) функциях распределения для базисных переменных нахождение коэффициента вариации несущей способности V_R не представляет сложности:

$$V_R = V\left[\mathbf{R} = \left\{R\left(b_i, H_i, f_{c,i}, f_{s,i}, \rho\right)\right\}_{i=1\ldots10000}\right], \qquad (11)$$

где b_i, H_i – реализации случайных переменных ширины и высоты сечения;

$f_{c,i}$, $f_{s,i}$ – реализации базисных переменных прочности бетона и арматуры;

ρ – относительная площадь армирования.

На рис.4. приведены графики изменения коэффициента вариации прочности нормальных сечений прямоугольной формы железобетонных элементов в зависимости от площади армирования, а также от отношения ширины сечения к высоте b/H. Графики получены симуляциями Монте-Карло, каждая точка соответствует коэффициенту вариации выборки из 10 000 элементов, где каждый элемент представляет значение функции прочности сечения, аргументы которой являются реализациями базисных переменных из таблицы 2.

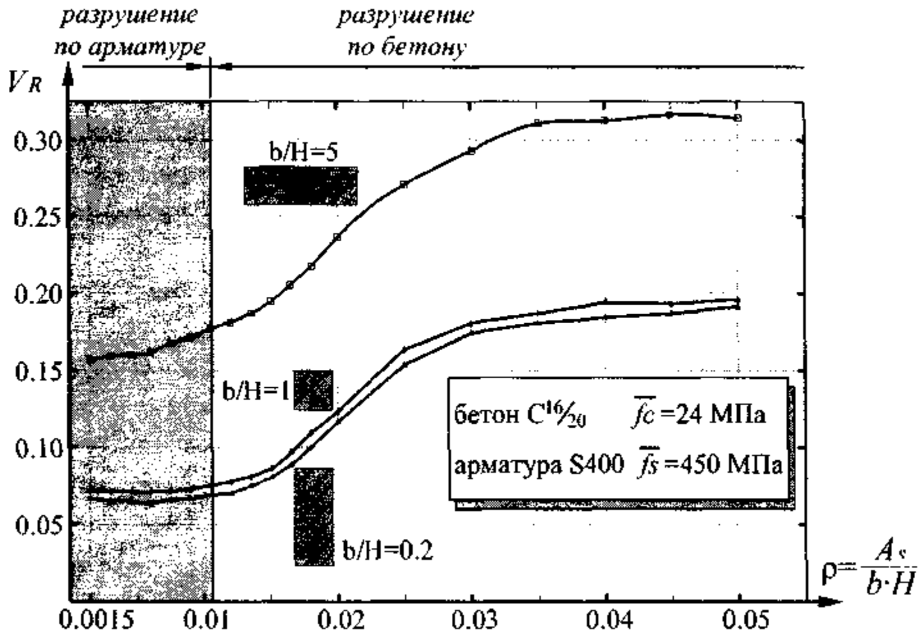


Рис.4. Зависимость коэффициента вариации прочности конструкции от коэффициента армирования и формы сечения

В соответствии с принципом обеспечения "нехрупкого" разрушения следует проектировать такое количество арматуры в конструкциях, которое попадает в закрашенную область на рисунке 4 (для конкретного соотношения прочностей бетона и арматуры в приведенном примере), которая еще называется областью оптимального проектирования, до которой можно сузить дальнейшие расчеты *n*.

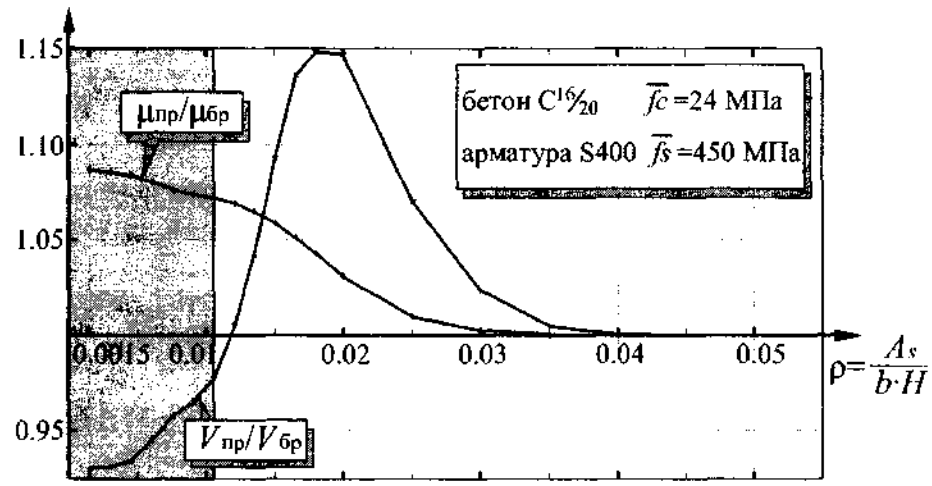


Рис.5. Отношение приемочных значений к браковочным для коэффициента вариации и математического ожидания прочности в зависимости от площади армирования

Для расчета отношений $\mu_{пр}/\mu_{бр}$ и $V_{пр}/V_{бр}$ были построены кривые (рис.5), показывающие влияние процента армирования на значения этих показателей. Каждая точка графиков соответствует результату деления статистических параметров двух выборок:

$$\mathbf{R} = \left\{ R\left(b_i, H_i, f_{c,i}, f_{s,i}, \rho\right) \right\}_{i=1..10000}; \quad \mathbf{R}_\Delta = \left\{ R\left(b_i, H_i, f_{c,i}, f_{s,i} + \Delta f_s, \rho\right) \right\}_{i=1..10000}$$

$$k_{\mu}=\frac{\mu[\mathbf{R}_{\Delta}]}{\mu[\mathbf{R}]}=\frac{\mu_{пр}}{\mu_{бр}};\ k_{V}=\frac{V[\mathbf{R}_{\Delta}]}{V[\mathbf{R}]}=\frac{V_{пр}}{V_{бр}}. \tag{12}$$

Таким образом, для расчета положения каждой точки графиков было проведено 20 000 симуляций прямым методом Монте-Карло.

На рис.6 приведен график изменения рекомендуемого количества испытаний n согласно ф.(4) в зависимости от ρ и от формы сечения для заданных рисков изготовителя и потребителя $\alpha = \beta = 0.25$.

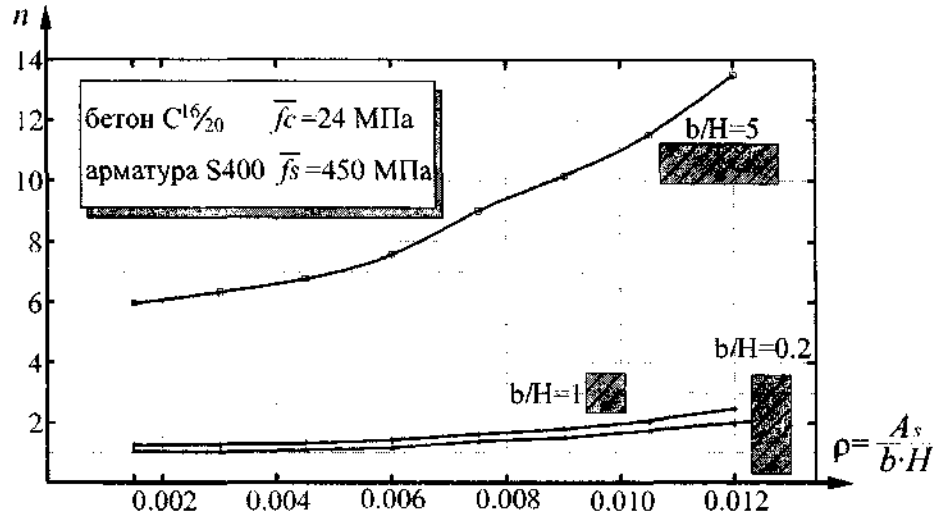


Рис. 6. Рекомендуемое количество испытаний для различных сечений при заданных рисках изготовителя и потребителя $\alpha = \beta = 0.25$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенная методика назначения контрольных планов испытаний позволяет учесть непреднамеренные резервы прочности железобетонных конструкций, возникающие вследствие консервативности оценочных процедур при приёмке материалов по единичным показателям качества. В данной постановке задачи реализуется принцип раздельного управления рисками изготовителя конструкций и потребителя. Вместе с тем, видится дальнейшее развитие проблемы путем рассмотрения широко используемых в строительных конструкциях тавровых сечений. Следует также отметить, что конечное количество n снижается в тех случаях, когда прочности бетона и арматуры сближаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Statistical methods for quality control of building materials and components: ISO 12491:1997. – International Organization for Standardization. – 30 p.
2. Арматура ненапрягаемая для железобетонных конструкций. Технические условия: СТБ 1704-2006. – Введ. 01.04.2007. – Минск: Госстандарт, 2007. – 14 с.
3. Бетонные и железобетонные конструкции: СНБ 5.03.01–02. – Введ. 01.07.2003. – Минск: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2003. – 144 с.
4. Probabilistic Model Code (12th Draft): Part 3 – Resistance models – Joint Committee on Structural Safety – JCSS–OSTL/DIA/VROU – 10–11–2000. – 41 p.