ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УСТОЙЧИВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Н. Н. Труш[1], А. Л. Черноокий[2]

[1]*Белорусский государственный университет*
г. Минск, Беларусь
E-mail:TroushNN@bsu.by
[2]*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина*
Брест, Беларусь
E-mail: paunch@brsu.brest.by

В статье дается определение и метод моделирования устойчивой случайной величины и α-устойчивого многомерного Леви. Далее рассматриваются многомерные стохастические дифференциальные уравнения с устойчивыми возмущениями и явные, явно-неявные и неявные методы моделирования таких уравнений. Приведен пример из финансовой математики, описываемый трехмерным стохастическим дифференциальным уравнением.

Ключевые слова: устойчивые распределения, стохастические дифференциальные уравнения, процесс Леви, моделирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛЕВИ

Определение. Случайная величина ξ будет устойчивой тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции $\psi_\xi(t), t \in R$ представим в виде

$$\ln \psi_\xi(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t\omega(t,\alpha,\beta), \tag{1}$$

$$\omega(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1}\beta tg(\pi\alpha/2), \alpha \neq 1, \\ -2\beta \ln|t|/\pi, \alpha = 1. \end{cases}$$

где $\alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1], \sigma > 0, \mu \in R$.

Из представления (1) видно, что класс устойчивых случайных величин представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами α,β,σ,μ. Если характеристическая функция случайной величины ξ удовлетворяет (1), то будем писать $\xi \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$. При $\sigma = 1$ и $\mu = 0$ устойчивую случайную величину будем называть стандартной.

Для генерирования устойчивой случайной величины $X \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$ по заданным параметрам $\alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1], \sigma > 0, \mu \in R$ воспользуемся следующим алгоритмом [1]:

1. Генерируем две базовые (независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0;1]$) случайные величины ξ_1 и ξ_2.

2. Используя ξ_1 и ξ_2 получаем случайную величину V, равномерно распределенную на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и независимую от нее случайную величину W, экспоненциально распределенную со средним равным 1, используя следующие соотношениям

$$V = -\pi/2 + \pi\xi_1,$$
$$W = -\ln(\xi_2).$$

3. Определим величины

$$B_{\alpha,\beta,\sigma,\mu} = \begin{cases} \mu, & \alpha \neq 1, \\ \mu + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln(\sigma), & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2))}{\alpha},$$

$$D_{\alpha,\beta,\sigma} = \sigma\left(\cos\left(\operatorname{arctg}(\beta tg(\pi\alpha/2))\right)\right)^{1/\alpha}.$$

4. Если $\alpha \in (0;2], \alpha \neq 1$, то выражение для случайной величины

$$X = D_{\alpha,\beta,\sigma}\frac{\sin(\alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos\left(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta})\right)}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} + B_{\alpha,\beta,\sigma,\mu},$$

5. если $\alpha = 1$, то

$$X = \sigma\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)\operatorname{tg}(V) - \beta\ln\left(\frac{\pi W\cos(V)/2}{\pi/2 + \beta V}\right)\right) + B_{\alpha,\beta,\sigma,\mu}.$$

Определение [1]. Действительный случайный процесс $X(t)$ с независимыми приращениями, определенный при $t \in [0;T]$, называется α-устойчивым процессом Леви, если выполняются следующие условия:

1) $X(0) = 0$ с вероятностью 1;

2) для любых точек $s,t \geq 0$ и $0 \leq s < t \leq T$ приращение $X(t) - X(s)$ имеет устойчивое распределение, т.е. $\left(X(t) - X(s)\right) \sim S_\alpha(\beta,((t-s)\sigma)^{1/\alpha},0), \alpha \in (0;2], \beta \in [-1;1]$, $\sigma > 0$.

В случае если $\sigma = 1$ α-устойчивый процесс Леви называется стандартным и обозначается $L_{\alpha,\beta}(t)$.

Для моделирования траектории стандартного α-устойчивого процесса Леви $L^\tau_{\alpha,\beta}(t)$ воспользуемся методом суммирования приростов. Отрезок $[0;T]$ разобьем на I равных интервалов точками $t_i = i\tau$, $i = 0,1,...,I$, $\tau = T/I$. Генерируем последовательность $\{\xi_i\}, i = 1,2,...,I$ стандартных устойчивых величин $\xi_i \sim S_\alpha(\beta,1,0)$, далее последовательно получаем значения траектории в точках $t_i = i\tau$, $i = 0,1,...,I$

$$\begin{aligned} &L^\tau_{\alpha,\beta}(0) = 0, \\ &L^\tau_{\alpha,\beta}(t_i) = L^\tau{}_{\alpha,\beta}(t_{i-1}) + \tau^{1/\alpha}\xi_i, i = 1,2,...,I. \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично можно получить явно-неявный метод Эйлера – Маруями (7) и неявный метод (8)

$$X_{i+1}^{(k)}(t) = X_i^{(k)} + a_k(s, X_{i+1}^{(k)})h_i + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(s, X_i^{(k)})\left(L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_{i-1}) - L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_i)\right), \qquad (7)$$

$$X_{i+1}^{(k)}(t) = X_i^{(k)} + a_k(s, X_{i+1}^{(k)})h_i + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(s, X_{i+1}^{(k)})\left(L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_{i-1}) - L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_i)\right), \qquad (8)$$

где $k = 1,2,...,n$, $(L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_{i+1}) - L^{(j)}{}_{\alpha,\beta}(t_i)) \sim S_\alpha(\beta, (t_{i+1} - t_i)^{1/\alpha}, 0)$ – приращение процесса Леви на отрезке $[t_i; t_{i+1}]$, $i = 1,2,...,N$. Эти методы требуют, в общем случае, решения нелинейной системы уравнений на каждом шаге, однако дают более точный результат, в случае если соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))dt$$

является жесткой.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ЭНЕРГОНОСИТЕЛЕЙ

В [4] рассматривается модель MRV (mean reverting models) рынка энергоносителей, описываемая системой трех стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими приращениями. Там же показано, что совокупный эксцесс приростов превышает 6, что не соответствует винеровскому процессу. Рассмотрим аналог этой модели с α-устойчивыми приращениями

$$\begin{aligned} dS(t) &= a\left(Z(t) - S(t)\right)dt + \sqrt{\sigma(t)}S(t)dL^{(1)}_{\alpha,\beta}(t), \\ dZ(t) &= mZ(t)dt + kL(t)dL^{(2)}_{\alpha,\beta}(t), \\ d\sigma(t) &= b\left(\sigma_0 - \sigma(t)\right)dt + l\sigma(t)dL^{(2)}_{\alpha,\beta}(t), \end{aligned} \qquad (9)$$

здесь $S(t)$ – цена на энергоноситель, $Z(t)$ – ожидание рынка, $\sigma(t)$ – волантильность, $Z(0) = Z_0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, постоянные a, m, k, b, σ_0, l – параметры модели.

В этой модели вектор сноса линейный, а матрица диффузии нелинейная, значит наиболее оптимальным будет применение явно-неявного метода Эйлера – Маруями, для этого разобьем отрезок интегрирования $[0;T]$ на N равных частей точками $\{t_i\}, i = \overline{0,N}$, $t_i = ih$, $h = T/N$ обозначим $S(t_i) = S_i$, $L(t_i) = L_i$, $\sigma(t_i) = \sigma_i$ и применим формулу (7)

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i + a\left(Z_{i+1} - S_{i+1}\right)h + \sqrt{\sigma_i}S_i\zeta_i^{(1)}, \\ Z_{i+1} &= Z_i + mZ_{i+1}h + kZ_i\zeta_i^{(2)}, \\ \sigma_{i+1} &= \sigma_i + b\left(\sigma_0 - \sigma_{i+1}\right)h + l\sigma_i\zeta_i^{(3)}, \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}$, $i = \overline{1,N}$ – последовательность независимых стандартных устойчивых величин.

Выразим из системы (10) S_{i+1}, Z_{i+1}, σ_{i+1} в явном виде

$$Z_{i+1} = \frac{Z_i + kZ_i\zeta_i^{(2)}}{1 - mh},$$

$$S_{i+1} = \frac{S_i + aZ_{i+1}h + \sqrt{\sigma_i}S_i\zeta_i^{(1)}}{1 - ah},$$

$$\sigma_{i+1} = \frac{\sigma_i + b\sigma_0 h + l\sigma_i\zeta_i^{(3)}}{1 + bh}.$$

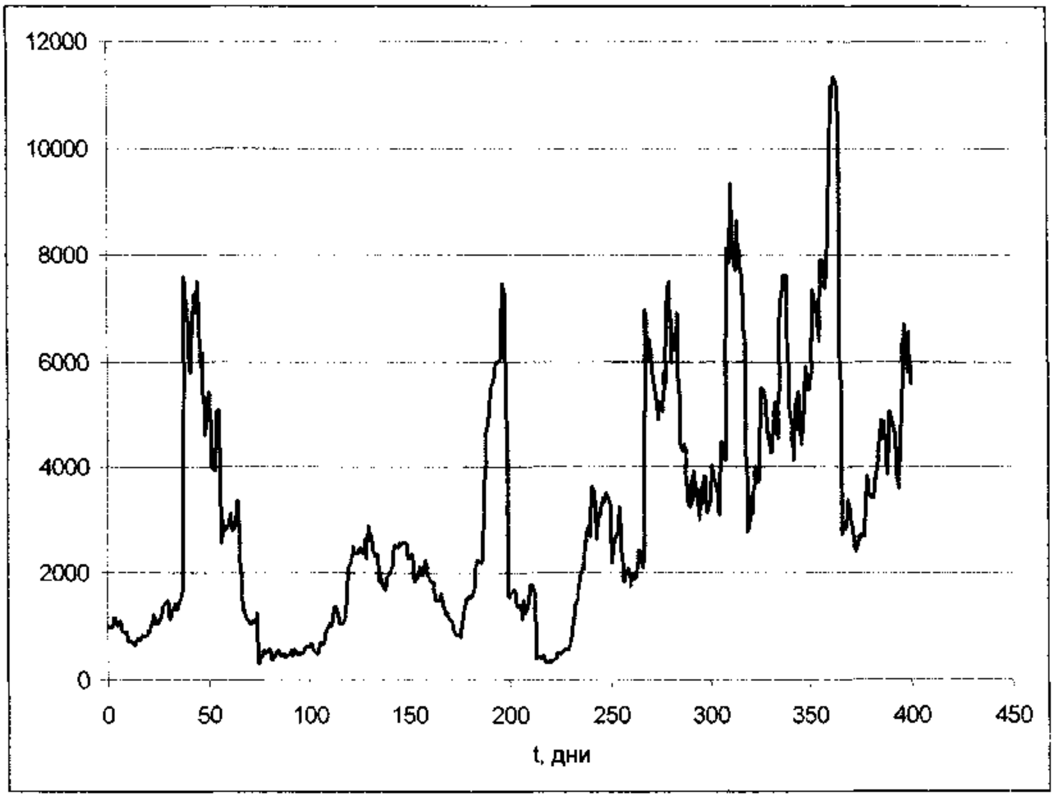

Рис. 1. Моделирование цены на энергоносители на период 400 дней. $a = 1, m = 20, k = 5, b = 1, \sigma_0 = 10, l = 0.8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Janicki, A; Izydorczyk, A.* Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym. Warszawa. Wydawnictwa Naukowe-Tehniczne. 2001.

2. *Kloeden, P. ; Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Springer, 1992.

3. *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб. Издательство СПбГТУ, 2001.

4. *Lari-Lavassani, Ali; Simchi, M.; Ware, Antony.* A Discrete Valuation of Swing Options. 1999. Preprint 28 pages. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science.