К УНИФИКАЦИИ ТИПОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Л. А. Сосновский, Д. Н. Шевченко

Белорусский государственный университет транспорта
Гомель, Беларусь
E-mail: Shevch_DN@mail.ru

Проведен анализ источников информации о типовых распределениях случайных величин; выработаны критерии, в соответствии с которыми среди множества вариантов предложены к использованию функции наименее унифицированных типовых распределений случайных величин.

Ключевые слова: закон распределения, однотипные случайные величины.

ВВЕДЕНИЕ

Распределения случайных величин ξ и η называются однотипными, если существуют постоянные a и $b \neq 0$ такие, что распределения вероятностей величин ξ и $a + b \cdot \eta$ совпадают [2].

В литературе и других источниках информации по теории вероятностей и ее приложениям (математической статистике, теории надежности, метрологии, теории связи и др.) отсутствует унификация многих типовых распределений случайных величин. В различных источниках однотипные распределения отличаются параметрами, их количеством и даже видом функции распределения. Это зачастую приводит к разночтениям, нестыковкам и, как следствие, ошибкам и дополнительным временным затратам на изучение, анализ и применение информации. Вредит данная ситуация и учебному процессу, требуя от студентов дополнительной усидчивости, а от преподавателя – дополнительных пояснений.

Особенно актуальна проблема при использовании компьютерных пакетов математического моделирования и статистического анализа данных. Реализованные в них варианты типовых распределений случайных величин зачастую невозможно редактировать, что ограничивает применение некоторого программного обеспечения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Цель работы. Целью данной работы является:

1. анализ источников информации (литературы, нормативных документов и программного обеспечения) с целью поиска вариантов функций типовых распределений случайных величин;
2. выработка критериев, в соответствии с которыми среди множества вариантов функций некоторого типового распределения будет выбран один;
3. выдача рекомендаций к использованию выбранных вариантов функций типовых распределений случайных величин в учебно-методической и научной работе.

Анализ источников информации. Все источники информации (всего было изучено 44 источника), используемые для анализа вариантов функций типовых распределений случайных величин, можно разделить на несколько групп:

1. специальная и справочная литература по теории вероятностей и математической статистике [1, 2, 4-8, 11-15];

2. справочная литература по математике и математическим методам [9];

3. литература по теории надежности, связи и другим наукам, широко использующим распределения случайных величин [10, 16];

4. пакеты компьютерной математики [17-21];

5. пакеты статистического анализа данных [22, 23].

Результаты анализа источников информации. Изучив и обобщив информацию о типовых распределениях случайных величин, можно прийти к следующим выводам о причинах разнообразия вариантов функций распределения:

1. наибольшее разнообразие характерно для распределений, широко используемых в теории надежности (Вейбулла, логнормального, гамма и др.). Причина такого разнообразия состоит, видимо, в наличии конкретного физического смысла некоторых параметров распределений. Поэтому они могут отличаться от параметров, принятых в литературе по теории вероятностей;

2. в англоязычных источниках информации (пакетах компьютерной математики и статистического анализа) типовые распределения достаточно унифицированы в сравнении с литературными источниками на русском языке. При этом тенденции к унификации распределений в новых изданиях на русском языке не наблюдается.

Критерии ранжирования литературы. Очевидно, что решение о выборе некоторого варианта функции распределения из множества не может приниматься простым «большинством голосов». Здесь следует учитывать, по крайней мере, два факта:

1. степень распространенности (популярности) некоторой литературы;

2. невозможность изменения встроенных функций типовых распределений в компьютерных пакетах анализа данных и моделирования.

Поэтому, для выбора единого варианта функции распределения из множества, предлагаются следующие критерии, ранжированные по важности:

1. реализация данного варианта функции в распространенных пакетах статистического анализа данных [22, 23];

2. в распространенных пакетах компьютерной математики [17-21];

3. в специальной и справочной литературе по распределениям случайных величин [1, 2, 4-9, 11-15];

4. в большинстве других литературных источников (список не приводится).

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВАРИАНТЫ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В соответствии с предложенными критериями, представим рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений, классифицированные по области возможных значений (таблица 1).

Таблица 1

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений

Распределение	Функция плотности распределения	Параметры	Источники с аналогичной функцией распределения	
			и параметрами	но другими именами параметров
1	2	3	4	5
Дискретные случайные величины				
Бернулли	$P(x)=\begin{cases}1-p, & x=0;\\ p, & x=1.\end{cases}$	p – вероятность успеха	3, 17, 18,22	
Отрицательное биномиальное (Паскаля)	$P(x)=C^{x}_{r+x-1}p^{r}(1-p)^{x},\ x=0,1,2,\ldots$	$r\geq 1$ – количество успехов; p – вероятность успеха	2, 22,	3, 5, 12, 17-19
Геометрическое	$P(x)=p(1-p)^{x},\ x=0,1,2,\ldots$	p – вероятность успеха в испытаниях Бернулли	17, 22	
Логарифмическое	$P(x)=-\dfrac{q^{x}}{x\cdot\ln(1-q)},\ x=1,2,3,\ldots$	q – вероятность успеха	2, 4	18
Непрерывные случайные величины (НСВ), областью значений которых является вся числовая ось				
Гумбеля (экстремальных значений, тип I)	$f(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}-\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right).$	α – мода; β – масштаб		12, 17, 23
Лапласа (двустороннее показательное)	$f(x)=\dfrac{\alpha}{2}\exp\left(-\alpha\lvert x-\beta\rvert\right)$	α – масштаб; β – положение	2, 14, 22	21
Логистическое	$f(x)=\dfrac{\exp\left(-\dfrac{x-\lambda}{\beta}\right)}{\beta\left(1+\exp\left(-\dfrac{x-\lambda}{\beta}\right)\right)^{2}}.$	β – масштаб; λ – положение	21	17-19, 22, 23

1	2	3	4	5
НСВ, областью значений которых является числовая полуось				
Г (гамма)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб	3, 20, 21	12, 23
Вейбулла-Гнеденко (экстремальных значений, тип III)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб	3, 5, 20-22	12, 16, 23
Логнормальное	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	μ – положение; σ – форма	3, 5, 9, 17, 19-21, 23	2, 10, 16
Нормальное, усеченное слева	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x>x_0;\\ 0, & x\le x_0.\end{cases}$ $c=\left(\dfrac{1}{2}-\Phi\left(\dfrac{x_0-\mu}{\sigma}\right)\right)$	x_0 – точка усечения, μ – положение, σ – разброс		10, 16
Парето	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x>x_0;\\ 0, & x\le x_0.\end{cases}$	α – масштаб, x_0 – мин. значение	2	17, 18, 21
Пирсона, тип V	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{-(\alpha+1)}\exp(-\beta/x)}{\beta^{-\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб	3, 21	
Пирсона, тип VI	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x/\beta)^{\alpha_1-1}}{\beta\cdot B(\alpha_1,\alpha_2)(1+x/\beta)^{\alpha_1-\alpha_2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α_1, α_2 – форма; β – масштаб	3, 21	
Рэлея	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\beta^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\beta^2}\right), & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	β – масштаб	22, 23	2
Фреше (экстремальных значений, тип II)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\exp\left(-\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right), & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб		12
Эрланга	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	α – форма; λ – масштаб		22
НСВ, областью значений которых является отрезок или интервал конечной длины				

1	2	3	4	5
В (бета)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}}{B(\nu,\omega)}, & x\in(0;1);\\ 0, & x\notin(0;1).\end{cases}$	ν, ω –форма	15, 23	1-4, 10, 12-14, 19-21
L-Сосновского	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\gamma\left[1-(1-x)^{\eta}\right]^{\gamma-1}}{(1-x)^{1-\eta}}, & x\in[0;1];\\ 0, x\notin[0;1].\end{cases}$	η, γ –форма		

ЛИТЕРАТУРА

1. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. М.: Наука, 1983. 416 с.

2. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Ю.В. Прохоров и др. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. Репр. изд. 912 с.

3. *Кельтон, В.* Имитационное моделирование. / В. Кельтон, А. Лоу. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.

4. *Кендалл, М.* Теория распределений / В. Кельтон, А. Стьюарт. М.: Наука, 1966. 587 с.

5. *Кобзарь, А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. М.: Физматлит, 2006. 813 с.

6. *Королюк, В.С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк. Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.

7. *Крамер, Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. М.: Мир, 1975. 648 с.

8. *Ликеш, И.* Основные таблицы математической статистики / И. Ликеш, И. Ляго. М.: Финансы и статистика, 1985. 356 с.

9. Математическая энциклопедия / И.М.Виноградов и др. М.: Сов. энциклопедия. В 5-ти томах, 1977.

10. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10т. Т.5: Проектный анализ надежности / В.И. Патрушев, А.И. Рембеза. М.: Машиностроение, 1988. 316 с.

11. *Оуэн, Д.Б.* Сборник статистических таблиц / Д.Б. Оуэн. М.: ВЦ АН СССР, 1973. 586 с.

12. СТБ ГОСТ Р 50779.10-2001 (ИСО 3534.1-93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. Мн.: 2001. 45 с.

13. *Уилкс, С.* Математическая статистика / С. Уилкс. М.: Наука, 1967. 632 с.

14. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. В 2-х томах. Т. 1, Т. 2: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.

15. *Хастингс, Н.* Справочник по статистическим распределениям / Н. Хастингс, Дж. Пикок. М.: Финансы и статистика, 1987. 95 с.

16. *Шор, Я.Б.* Таблицы для анализа и контроля надежности / Я.Б. Шор, Ф.И. Кузьмин. Советское радио, 1968. 288 с.

17. MapleSoft, Waterloo Maple Inc. (2005). Maple 10. Maple Help.

18. Matematica, Wolfram Research Inc. (2005). Matematica 5.2. Matematica Help.

19. MathSoft, Inc. (2000). Mathcad 2001 Professional. Mathcad Help.

20. Microsoft, Inc. (2000). Microsoft Excel 2000. Справка по Microsoft Excel 2000.

21. Minuteman Software. (2001). GPSS World. Reference manual.

22. StatPoint, Inc. (2007). STATGRAPHICS Centurion XV. Help System.

23. StatSoft, Inc. (2001). Электронный учебник по промышленной статистике. Москва, StatSoft. WEB: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.