

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЗАИМНОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ УСТОЙЧИВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Т. В. Соболева

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
E-mail: Soboleva@bsu.by

В данной статье для взаимной модифицированной периодограммы приведены выражения для математического ожидания и дисперсии. Получена оценка скорости сходимости математического ожидания взаимной модифицированной периодограммы при ограничениях на окна просмотра данных и гладкость взаимной спектральной плотности.

Ключевые слова: многомерное устойчивое случайное поле, взаимная спектральная плотность, взаимная модифицированная периодограмма.

Рассмотрим r -мерное действительный устойчивое однородное случайное поле $X^r(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}, t = (t_1, \dots, t_n) \in R^n, r \geq 1$.

Спектральное представление составляющей $X_a(t), a = \overline{1, r}$, случайного поля $X^r(t), t \in R^n, r \geq 1$, имеет вид

$$X_a(t) = \int_{R^n} \cos(\langle \lambda, t \rangle) d\xi_a(\lambda),$$

где, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\langle \lambda, t \rangle$ — скалярное произведение векторов, $\xi_a(\lambda)$ — составляющая действительного a — устойчивого однородного случайного поля $\xi^r(\lambda) = \{\xi_a(\lambda), a = \overline{1, r}\}$.

$\lambda \in R^n, r \geq 1$, с независимыми приращениями такого, что

$$\left\{ E|d\xi_a(\lambda)d\xi_b(\lambda)|^{p/2} \right\}^{\alpha/p} = C(p, \alpha) f_{ab}(\lambda) d\lambda,$$

для всех $0 < p < \alpha < 2$, причём $C(p, \alpha)$ зависит от p и α , и не зависит от $\xi_a(\lambda)$ и $\xi_b(\lambda)$.

$a, b = \overline{1, r}$. Функция $f_{ab}(\lambda), \lambda \in R^n$, является интегрируемой и называется взаимной спектральной плотностью составляющих $X_a(t)$ и $X_b(t)$ поля $X^r(t), t \in R^n$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} H_a(\lambda) &= H_a(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \\ &= \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 h_a(t_1, \dots, t_n) \cos(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n) dt_1 \dots dt_n = \int_{[-1, 1]^n} h_a(t) \cos(\langle \lambda, t \rangle) dt \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$H_a^{(T)}(\lambda) = H_a^{(T_1, \dots, T_n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \\ = \int_{-T_1}^{T_1} \dots \int_{-T_n}^{T_n} h_a\left(\frac{t_1}{T_1}, \dots, \frac{t_n}{T_n}\right) \cos(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n) dt_1 \dots dt_n = \int_{\Gamma^n} h_a^{(T)}(t) \cos(\langle \lambda, t \rangle) dt, \quad (2)$$

где $\lambda \in R^n$, $h_a\left(\frac{t}{T}\right) = h_a^{(T)}(t)$, $t \in R^n$, — окно просмотра данных,

$\Gamma^n = [-T_1, T_1] \times \dots \times [-T_n, T_n]$, $T_j \in R_+ = (0, +\infty)$, $j = \overline{1, n}$. Функция $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, называется частотным окном, особенностью поведения которого является то, что оно становится всё более сконцентрированным в окрестности нуля при $\min_j T_j \rightarrow \infty$. Для

$j = \overline{1, n}$

функции $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, справедливо следующее равенство

$$H_a^{(T_1, \dots, T_n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\prod_{j=1}^n T_j \right) H_a(T_1 \lambda_1, \dots, T_n \lambda_n). \quad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$H_{ab}^{(T)}(\lambda) = A_{ab}^{(T)} \left| H_a^{(T)}(\lambda) H_b^{(T)}(\lambda) \right|^{1/2}, \quad (4)$$

где

$$A_{ab}^{(T)} = \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^n T_i \right)^{1-\alpha}}{B_{ab}^{(\alpha)}} \right)^{1/\alpha}, \quad (5)$$

$$B_{ab}^{(\alpha)} = \int_{R^n} \left| H_a(\lambda) H_b(\lambda) \right|^{\alpha/2} d\lambda, \quad (6)$$

а $H_a(\lambda)$, $H_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, заданы равенствами (1) и (2) соответственно, $\alpha \in (0, 2)$.

Пусть $X_a(t)$, $t \in \Gamma^n$, $a = \overline{1, r}$, — реализация составляющей $X_a(t)$, $t \in R^n$,

$a = \overline{1, r}$, рассматриваемого поля $X^r(t)$, $t \in R^n$.

Определение 1. Модифицированным конечным преобразованием Фурье построенным по реализации $X_a(t)$, $t \in \Gamma^n$, будем называть статистику вида

$$d_a^{(T)}(\lambda) = A_a^{(T)} l_a^{(T)}(\lambda),$$

где

$$l_a^{(T)}(\lambda) = Q(\lambda) \int_{\Gamma^n} h_a^{(T)}(t) X_a(t) \cos(\langle \lambda, t \rangle) dt, \quad (7)$$

$$(2) \quad Q(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-1/\alpha}, & \lambda \neq 0, 0 < \alpha \leq 1, \\ 2^{-1/\alpha}, & \lambda \neq 0, 1 < \alpha \leq 2, \\ 2^{1-2/\alpha}, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{а } A_a^{(T)} = \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^n T_i \right)^{1-\alpha}}{\int_{R^n} |H_a(\lambda)|^\alpha d\lambda} \right)^{1/\alpha}.$$

Определение 2. Взаимной модифицированной периодограммой реализации $X_a(t)$, $t \in T^n$, будем называть статистику вида

$$I_{ab}^{(T)}(\lambda) = k(p, \alpha) \left| A_{ab}^{(T)} \left| I_a^{(T)}(\lambda) I_b^{(T)}(\lambda) \right|^{1/2} \right|^p, \quad (9)$$

где

$$(3) \quad k(p, \alpha) = \frac{D(p)}{F(p, \alpha) c_\alpha^{p/\alpha}}, \quad (10)$$

$$(4) \quad F(p, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{-1-p} \left(1 - \exp\{-|u|^\alpha\} \right) du, \quad (11)$$

$$(5) \quad D(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{|u|^{1+p}} du, \quad (12)$$

$$(6) \quad c_\alpha = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left(\alpha \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right)^{-1} > 0, \quad (13)$$

$0 < p < \alpha < 2$, а $A_{ab}^{(T)}$, $I_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, определены соотношениями (5) и (7) соответственно.

Введём следующее обозначение

$$(6) \quad H_{ab}^{(T)}(x, y) = A_{ab}^{(T)} \left| H_a^{(T)}(x) H_b^{(T)}(y) \right|^{1/2}, \quad (14)$$

где $x, y \in R^n$, а $A_{ab}^{(T)}$ задана соотношением (5). Заметим, что $H_{ab}^{(T)}(x, x) = H_{ab}^{(T)}(x)$, где $H_{ab}^{(T)}(x)$ определена равенством (4).

Приведём без доказательства следующий результат.

Лемма 1. Для статистики $I_a^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, определённой соотношением (7), справедливо равенство

$$(7) \quad E \exp \left\{ r A_{ab}^{(T)} \left| I_a^{(T)}(\lambda) I_b^{(T)}(\lambda) \right|^{1/2} \right\} = \exp \left\{ -c_\alpha |r|^\alpha \gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) \right\}, \quad (15)$$

где

$$(7) \quad \gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) = \left(\frac{Q(\lambda)}{2} \right)^\alpha \int_{R^n} \left[(H_{ab}^{(T)}(\lambda - \mu, \lambda - \mu))^2 + (H_{ab}^{(T)}(\lambda - \mu, \lambda + \mu))^2 + (H_{ab}^{(T)}(\lambda + \mu, \lambda - \mu))^2 + (H_{ab}^{(T)}(\lambda + \mu, \lambda + \mu))^2 \right]^{1/2} f_{ab}(\mu) d\mu. \quad (16)$$

а $\lambda \in R^n$, $r \in R$, $\alpha \in (0, 2)$, а c_α , $Q(\lambda)$, $A_{ab}^{(T)}$, $H_{ab}^{(T)}(x, y)$ заданы соотношениями (13), (5), (8) и (14) соответственно.

Теорема 1. Для математического ожидания и дисперсии взаимной модифицированной периодограммы $I_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, определенной соотношением (9), имеют место следующие соотношения

$$EI_{ab}^{(T)}(\lambda) = (\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda))^{p/\alpha}, \quad 0 < p < \alpha, \quad (17)$$

$$DI_{ab}^{(T)}(\lambda) = \left(\frac{k^2(p, \alpha)}{k(2p, \alpha)} - 1 \right) (\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda))^{2p/\alpha}, \quad 0 < p < \alpha/2, \quad (18)$$

$\gamma_{ab}^{(T)}(\lambda) > 0$, $\alpha \in (0, 2)$, а $H_{ab}^{(T)}(x, y)$, $Q(\lambda)$, $k(p, \alpha)$ заданы равенствами (14), (8), (10) соответственно.

Доказательство. Проводится аналогично доказательствам, приведенным в [1, 2].

Аналогично [1, стр. 5], будем предполагать, что для функции $H_a(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, справедливо неравенство

$$|H_a(\lambda)| \leq \frac{K_a}{\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i^2)^{\beta/2}}, \quad (19)$$

где K_a — некоторая положительная постоянная, $\beta \geq 1$.

Введём в рассмотрение функцию

$$\Delta_{ab}(\lambda) = \int_{R^n} H_a(u)^{\alpha/2} |H_b(\lambda - u)|^{\alpha/2} du. \quad (20)$$

Лемма 2. Для функции $\Delta_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, заданной соотношением (20), при условии (19), справедливо неравенство

$$\Delta_{ab}(\lambda) \leq \frac{L_{ab}}{\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i^2)^{\alpha\beta/2}}, \quad (21)$$

где $\lambda \in R^n$, $\alpha \in (0, 2)$, $\beta \geq 1$, L_{ab} — некоторая постоянная.

Доказательство. Воспользовавшись леммой 3.1 приведенной в статье [1], получим (21). Лемма доказана.

Определение 3. Говорят, что взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, удовлетворяет условию Гельдера в точке $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}) \in R^n$ порядка τ , $0 < \tau \leq 1$, если для всех λ , достаточно близких к $\lambda^{(0)}$, справедливо

$$f_{ab}(\lambda + \lambda^{(0)}) = f_{ab}(\lambda^{(0)}) + A_{ab}(\lambda, \lambda^{(0)}), \quad (22)$$

где $|A_{ab}(\lambda, \lambda^{(0)})| \leq C_{ab}(\lambda^{(0)}) \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^\tau$, $0 < C_{ab}(\lambda^{(0)}) = const < \infty$.

Введём следующее обозначение $t \otimes u = (t_1 u_1, \dots, t_n u_n)$, где $t = (t_1, \dots, t_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$.

Теорема 2. Если спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, непрерывна в точке $\lambda^{(0)} \in R^n$ и ограничена в R^n , то в условиях теоремы 1

$$\lim_{\substack{\min T \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} EI_{ab}^T(\lambda^{(0)}) = (f_{ab}(\lambda^{(0)}))^{p/\alpha}, \quad \text{при } 0 < p < \alpha, \quad (23)$$

$$\lim_{\min_{i=1,n} T_i \rightarrow \infty} DI_{ab}^T(\lambda^{(0)}) = \left(\frac{k^2(p, \alpha)}{k(2p, \alpha)} - 1 \right) (f_{ab}(\lambda^{(0)}))^{2p/\alpha}, \text{ при } 0 < p < \alpha/2, \quad (24)$$

где $k(p, \alpha)$ задано соотношением (10).

Доказательство. Учитывая соотношение (17) и неравенство $|x^r - y^r| \leq |x - y|^r$, справедливое для $x, y \in R$ и $0 < r < 1$, получим

$$\left| EI_{ab}^T(\lambda^{(0)}) - (f_{ab}(\lambda^{(0)}))^{p/\alpha} \right| \leq \left| \gamma_{ab}^T(\lambda^{(0)}) - f_{ab}(\lambda^{(0)}) \right|^{p/\alpha}. \quad (25)$$

В (16) воспользовавшись неравенством $|x + y|^r \leq |x|^r + |y|^r$, для $x, y \in R$ и $0 < r \leq 1$, и учитывая (8), имеем

$$\begin{aligned} \left| \gamma_{ab}^T(\lambda^{(0)}) - f_{ab}(\lambda^{(0)}) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{R^n} H_{ab}^T(\lambda^{(0)} - \mu, \lambda^{(0)} - \mu)^{\alpha} |f_{ab}(\mu) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| d\mu + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{R^n} H_{ab}^T(\lambda^{(0)} - \mu, \lambda^{(0)} + \mu)^{\alpha} |f_{ab}(\mu)| d\mu + \frac{1}{2} \int_{R^n} H_{ab}^T(\lambda^{(0)} - \mu, \lambda^{(0)} + \mu)^{\alpha} |f_{ab}(\mu)| d\mu + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{R^n} H_{ab}^T(\lambda^{(0)} + \mu, \lambda^{(0)} + \mu)^{\alpha} |f_{ab}(\mu) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| d\mu = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим J_1 . Сделав замену переменных интегрирования $\mu_i = \lambda_i^{(0)} - u_i$, $i = \overline{1, n}$, имеем

$$J_1 = \int_{R^n} H_{ab}^T(u)^{\alpha} |f_{ab}(\lambda^{(0)} - u) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| du. \quad (27)$$

Так как функция $f_{ab}(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda^{(0)} \in R^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех λ , удовлетворяющих неравенству $|\lambda_i - \lambda_i^{(0)}| < \delta$,

$i = \overline{1, n}$, выполняется неравенство $|f_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| \leq \varepsilon$. Тогда

$$J_1 = \int_A H_{ab}^T(v)^{\alpha} |f_{ab}(\lambda^{(0)} + v) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| dv + \int_{R^n \setminus A} H_{ab}^T(v)^{\alpha} |f_{ab}(\lambda^{(0)} + v) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| dv, \quad (28)$$

где $A = \left\{ |\lambda_i| \leq \delta, i = \overline{1, n}, \delta > 0 \right\}$.

Таким образом, первое слагаемое в правой части (28) не превосходит $\varepsilon \int_A H_{ab}^T(v)^{\alpha} dv$

и его можно сделать сколь угодно малым за счёт выбора ε .

Второе слагаемое меньшее либо равно

$$2 \max_{v \in R^n} |f_{ab}(v)| \int_{R^n \setminus A} H_{ab}^T(v)^{\alpha} dv,$$

и оно стремится к нулю при $\min_{i=1,n} T_i \rightarrow \infty$. Аналогичный результат можно получить для J_4 .

Рассмотрим J_2 . Воспользуемся соотношениями (14), (5) и (3). Сделав замену переменных интегрирования $\mu_i = \lambda_i^{(0)} - v_i$, $i = \overline{1, n}$, а затем $v_i = \frac{u_i}{T_i}$, $i = \overline{1, n}$, имеем

$$J_2 \leq \frac{1}{B_{ab}^{(\alpha)}} \max_{\mu \in R^n} |f_{ab}(\mu)| \int_{R^n} H_a(u) H_b(2\lambda_0 \otimes T - u)^{\alpha/2} du.$$

Учитывая неравенство (21), получим

$$J_2 \leq \frac{\max_{\mu \in R^n} |f_{ab}(\mu)|}{B_{ab}^{(\alpha)}} \Delta_{ab}(2\lambda_0 T) \leq \frac{L_{ab} \max_{\mu \in R^n} |f_{ab}(\mu)|}{B_{ab}^{(\alpha)} \prod_{i=1}^n \left(1 + (2\lambda_i^{(0)} T_i)^2\right)^{\alpha/2}}. \quad (29)$$

Таким образом, $J_2 \rightarrow 0$ при $\min_{i=1, \dots, n} T_i \rightarrow \infty$. Аналогичный результат можно получить для J_3 . Теорема доказана.

Теорема 3. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, ограничена в R^n , удовлетворяет условию Гельдера (22) в точке $\lambda^{(0)} \in R^n$, $\beta > \frac{1+\tau}{\alpha}$, а для функции $H_a(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, справедливо неравенство (19), то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |EI_{ab}^T(\lambda^{(0)}) - f_{ab}(\lambda^{(0)})| &\leq \left(\frac{C_{ab}(\lambda^{(0)}) M}{\sum_{i=1}^n T_i^\tau} + \frac{L_{ab} \max_{\mu \in R^n} |f_{ab}(\mu)|}{B_{ab}^{(\alpha)} \prod_{i=1}^n \left(1 + (2\lambda_i^{(0)} T_i)^2\right)^{\alpha/2}} \right)^{\alpha/\alpha}, \\ M &= \frac{(K_a K_b)^{\alpha/2} (\sqrt{\pi})^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta - \tau - 1)\right) \Gamma\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta - 1)\right)^{n-1}}{B_{ab}^{(\alpha)} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)\right)^n}, \end{aligned} \quad (30)$$

$0 < p < \alpha$, $\alpha \in (0, 2)$, $\mu \in R$, $B_{ab}^{(\alpha)}$ определена (6), а L_{ab} , $A_{ab}(\lambda^{(0)})$ — положительные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим (27) и (29). В правой части (27) сделав замену переменных интегрирования $\mu_i = \lambda_i^{(0)} - u_i$, $i = \overline{1, n}$, воспользовавшись равенствами (4), (5) и (3), имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\prod_{i=1}^n T_i}{B_{ab}^{(\alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_a(T_1 u_1, \dots, T_n u_n) H_b(T_1 u_1, \dots, T_n u_n)^{\alpha/2} \left| f_{ab}(\lambda_1^{(0)} - u_1, \dots, \lambda_n^{(0)} - u_n) - \right. \\ &\quad \left. - f_{ab}(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}) \right| du_1 \dots du_n. \end{aligned}$$

Далее полагая $u_i = \frac{v_i}{T_i}$, $i = \overline{1, n}$, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{B_{ab}^{(\alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_a(v_1, \dots, v_n) H_b(v_1, \dots, v_n)^{\alpha/2} \left| f_{ab}(\lambda_1^{(0)} - \frac{v_1}{T_1}, \dots, \lambda_n^{(0)} - \frac{v_n}{T_n}) - \right. \\ &\quad \left. - f_{ab}(\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}) \right| dv_1 \dots dv_n. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства (19) и (22), имеем

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{2^n C_{ab}(\lambda^{(0)}) (K_a K_b)^{\alpha/2}}{B_{ab}^{(\alpha)}} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{v_i^\tau}{\prod_{i=1}^n (1+v_i^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \dots dv_n = \\
&= \frac{2^n C_{ab}(\lambda^{(0)}) (K_a K_b)^{\alpha/2}}{B_{ab}^{(\alpha)}} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\frac{v_i}{T_i} \right)^\tau \frac{1}{(1+v_1^2)^{\alpha\beta/2} (1+v_2^2)^{\alpha\beta/2} \dots (1+v_n^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \dots dv_n = \\
&= \frac{2^n C_{ab}(\lambda^{(0)}) (K_a K_b)^{\alpha/2}}{B_{ab}^{(\alpha)}} \left(\frac{1}{T_1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{v_1^\tau}{(1+v_1^2)^{\alpha\beta/2} (1+v_2^2)^{\alpha\beta/2} \dots (1+v_n^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \dots dv_n + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{T_n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{v_n^\tau}{(1+v_1^2)^{\alpha\beta/2} (1+v_2^2)^{\alpha\beta/2} \dots (1+v_n^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \dots dv_n \right) = \\
&= \frac{2^n C_{ab}(\lambda^{(0)}) (K_a K_b)^{\alpha/2}}{B_{ab}^{(\alpha)}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) \int_0^\infty \frac{v_1^\tau}{(1+v_1^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+v_1^2)^{\alpha\beta/2}} dv_1 \right)^{n-1} = \\
(30) \quad &= \frac{C_{ab}(\lambda^{(0)}) (K_a K_b)^{\alpha/2} (\sqrt{\pi})^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta - \tau - 1)\right) \Gamma\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta - 1)\right)^{n-1}}{B_{ab}^{(\alpha)} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) \right)^n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) = \\
&= C_{ab}(\lambda^{(0)}) M\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i}\right).
\end{aligned}$$

Аналогичное неравенство можно получить для J_4 . Таким образом, учитывая (29), приходим к (30).

Теорема доказана.

Приведём без доказательства следующий результат.

Теорема 4. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, непрерывна в точках $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \in R^n$, таких, что $\lambda_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)} \neq 0$, $\lambda_j^{(1)} - \lambda_j^{(2)} \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, ограничена в R^n , то для ковариации взаимной модифицированной периодограммы $I_{ab}^T(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, определенной равенством (9), справедливо следующее соотношение

$$\lim_{\substack{\min T_i \rightarrow \infty \\ i \in \overline{1, n}}} \text{cov}\left\{ I_{ab}^T(\lambda^{(1)}), I_{ab}^T(\lambda^{(2)}) \right\} = 0.$$

Как видно из теоремы 2, статистика $I_{ab}^T(\lambda)$, определенная соотношением (9), является асимптотически несмещенной оценкой для функции $(f_{ab}(\lambda))^{p/\alpha}$, но не является состоятельной.

В качестве оценки взаимной спектральной плотности рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}_{ab}^T(\lambda) = \left(\tilde{f}_{ab}^T(\lambda) \right)^{p/\alpha}, \quad (31)$$

где $\tilde{f}_{ab}^T(\lambda)$ имеет представление

$$\tilde{f}_{ab}^T(\lambda) = \int_{R^n} W_T(\lambda - u) I_{ab}^T(u) du,$$

$0 < p < \alpha < 2$, $I_{ab}^T(u)$, $u \in R^n$, задана соотношением (9), а спектральное окно $W_T(\lambda)$, представимо в виде

$$W_T(\lambda) = \left(\prod_{i=1}^n M_{T_i} \right) W(M_{T_1} \lambda_1, \dots, M_{T_n} \lambda_n) = \left(\prod_{i=1}^n M_{T_i} \right) W(M_T \otimes \lambda),$$

$M_{T_j} \xrightarrow[\min T_j \rightarrow \infty]{} \infty$, $\frac{M_{T_j}}{T_j} \xrightarrow[\min T_j \rightarrow \infty]{} 0$, $T_j \in R_+$, $j = \overline{1, n}$, $M_T \otimes \lambda = (M_{T_1} \lambda_1, \dots, M_{T_n} \lambda_n)$, а

$W(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, — чётная по каждому аргументу, неотрицательная, непрерывная функция, равная нулю при $|\lambda_j| > 1$, $j = \overline{1, n}$, такая, что

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 W(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n = 1.$$

Заметим, что $W_T(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$1) \int_{R^n} W_T(v) dv = 1,$$

$$2) \lim_{\substack{\min T_j \rightarrow \infty \\ j=1, n}} \int_{R^n \setminus A} W_T(v) dv = 0,$$

где $A = \left\{ |v_i| \leq \delta, i = \overline{1, n}, \delta > 0 \right\}$.

Статистика (31) будет асимптотически несмещённой и состоятельной в смысле сходимости по вероятности оценкой взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in R^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Masry, E. Spectral density estimation for stationary stable processes / E. Masry, S. Cambanis. // Stochastic Processes and Their Applications. 1984. Vol. 18. № 18. P. 1-31.*
2. *Труш, Н.Н. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых процессов / Н.Н. Труш, Т.В. Соболева. Минск: БГУ, 2008. 67 с.*