# Физика

УДК 539.12:530.145

*В.А. ПЛЕТЮХОВ, В.И. СТРАЖЕВ*

## ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ В ТЕОРИИ ДИРАКА – КЭЛЕРА

It is shown, that Dirac – Kaehler equation, which describes the particles with mass, can be considered as the result of mixture (topological interaction) of two massless fields. One of those fields corresponds to massless vector field, another field is the generalization of Kalb – Ramond field (notoph).

В работах [1–3] предложен отличающийся от хиггсовского механизм генерации массы, основанный на калибровочно-инвариантном смешивании свободных безмассовых полей. Такой подход имеет важное значение для теории суперструн (см., например, [4–7]). Одним из примеров реализации такого механизма может служить $\hat{B} \wedge \hat{F}$-теория [1, 2], согласно которой в качестве исходных рассматриваются электромагнитное поле и безмассовое векторное поле со спиральностью 0 (в литературе оно известно под названием «нотоф» [8] и «поле Кальба – Рамонда» [3]). Конечным результатом $\hat{B} \wedge \hat{F}$-теории является уравнение Даффина – Кеммера для массивной частицы со спином 1.

В настоящей работе предлагается общая модель калибровочно-инвариантного смешивания, охватывающая полный набор антисимметричных тензорных полей в пространстве размерности $d = 4$, известный в литературе как поле Дирака – Кэлера (см., например, [9]) или векторное поле общего типа [10].

1. Рассмотрим две безмассовые системы:

$$\partial_\nu \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi = 0, \tag{1а}$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\varphi} = 0, \tag{1б}$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + \varphi_{\mu\nu} = 0, \tag{1в}$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + \varphi = 0, \tag{1г}$$

$$\partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + \tilde{\varphi} = 0 \tag{1д}$$

и

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \psi + \psi_\mu = 0, \tag{2а}$$

$$\partial_\nu \tilde{\psi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\psi} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{2б}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0, \tag{2в}$$

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \tag{2г}$$

$$\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{2д}$$

где $\varphi, \psi$ – скаляры; $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ – псевдоскаляры; $\varphi_\mu, \psi_\mu$ – векторы; $\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\psi}_\mu$ – псевдовекторы; $\varphi_{\mu\nu}, \psi_{\mu\nu}$ – антисимметричные тензоры второго ранга; $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$, $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}$. В качестве потенциалов системы (1) выступают величины $\varphi_\mu$ и $\tilde{\varphi}_\mu$, и она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\delta\varphi_\mu = \partial_\mu \lambda, \qquad \delta\tilde{\varphi}_\mu = \partial_\mu \tilde{\lambda}, \tag{3}$$

где произвольный выбор калибровочных функций $\lambda, \tilde{\lambda}$ ограничен условиями

$$\Box\lambda = 0, \ \Box\tilde{\lambda} = 0. \tag{4}$$

Система (2), в которой роль потенциалов играют величины $\psi_{\mu\nu}$, $\psi$, $\tilde{\psi}$, инвариантна уже относительно следующих преобразований:

$$\delta\psi_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\lambda}_\beta, \tag{5}$$

$$\delta\psi = \text{const}, \qquad \delta\tilde{\psi} = \text{const}, \tag{6}$$

с ограничениями на калибровочные функции

$$\Box\lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \lambda_\nu = 0, \ \Box\tilde{\lambda}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{\lambda}_\nu = 0. \tag{7}$$

Система (1), рассматриваемая как безмассовый предел уравнения Дирака – Кэлера, известна в литературе (см., например, [9]). Система (2), впервые описанная авторами настоящей статьи (см. [11]), представляет собой второй тип безмассового предела уравнения Дирака – Кэлера. Число независимых физических состояний, соответствующих системам (1) и (2), можно определить по методике, изложенной в п. 3 настоящей работы, согласно которой каждая из систем описывает безмассовое поле с 4 степенями свободы: система (1) – безмассовое векторное поле с двукратным вырождением состояний, частным случаем которого является собственно электромагнитное поле, система (2) – обобщенное поле Кальба – Рамонда совместно с двумя безмассовыми скалярными полями, т. е. с удвоением состояний с нулевой спиральностью по дополнительному квантовому числу (внутренней четности).

2. Дополним лагранжиан $L_0$ совместно рассматриваемых безмассовых систем (1), (2) (явный вид $L_0$ не выписываем, поскольку он здесь не понадобится) выражением

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} &= -m\varphi_\mu \psi_\mu - m\tilde{\varphi}_\mu \tilde{\psi}_\mu = \\ &= m\varphi_\mu \partial_\nu \psi_{\mu\nu} + m\varphi_\mu \partial_\mu \psi + m\tilde{\varphi}_\mu \partial_\nu \tilde{\psi}_{\mu\nu} + m\tilde{\varphi}_\mu \partial_\mu \tilde{\psi}, \end{aligned} \tag{8}$$

инвариантным (с точностью до полной дивергенции) относительно калибровочных преобразований (3) – (7). Варьирование лагранжиана

$$L = L_0 + L_{\text{int}} \tag{9}$$

дает следующую систему уравнений:

$$\partial_\nu \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi - m\partial_\nu \psi_{\mu\nu} - m\partial_\mu \psi = 0, \tag{10а}$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\varphi} - m\partial_\nu \tilde{\psi}_{\mu\nu} - m\partial_\mu \tilde{\psi} = 0, \tag{10б}$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + \varphi_{\mu\nu} = 0, \tag{10в}$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + \varphi = 0, \tag{10г}$$

$$\partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + \tilde{\varphi} = 0, \tag{10д}$$

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \psi + \psi_\mu = 0, \tag{10е}$$

$$\partial_\nu \tilde{\psi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\psi} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{10ж}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + m\left(\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu\right) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta - m\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = 0, \tag{10з}$$

$$\partial_\mu \psi_\mu - m\partial_\mu \varphi_\mu = 0, \tag{10и}$$

$$\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu - m\partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu = 0. \tag{10к}$$

Сравнивая уравнения (10а) – (10д) соответственно с уравнениями (10е) – (10к), получаем систему

$$\partial_\nu \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi + m\psi_\mu = 0, \tag{11а}$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\varphi} + m\tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{11б}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\varphi_{\mu\nu} = 0, \tag{11в}$$

$$\partial_\mu \psi_\mu + m\varphi = 0, \tag{11г}$$

$$\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\varphi} = 0, \tag{11д}$$

$$\partial_\nu \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \psi + \psi_\mu = 0, \tag{11е}$$

$$\partial_\nu \tilde{\psi}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\psi} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{11ж}$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + \varphi_{\mu\nu} = 0, \tag{11з}$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + \varphi = 0, \tag{11и}$$

$$\partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + \tilde{\varphi} = 0. \tag{11к}$$

Вычитая из уравнений (11а) – (11д) умноженные на $m$ соответственно уравнения (11е) – (11к) и вводя обозначения

$$\Lambda_\mu = \psi_\mu - m\varphi_\mu, \tag{12а}$$

$$\tilde{\Lambda}_\mu = \tilde{\psi}_\mu - m\tilde{\varphi}_\mu, \tag{12б}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - m\psi_{\mu\nu}, \tag{12в}$$

$$\Lambda = \varphi - m\,\psi, \tag{12г}$$

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\varphi} - m\,\tilde{\psi}, \tag{12д}$$

получаем систему

$$\partial_\nu \Lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda = 0, \tag{13а}$$

$$\partial_\nu \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} + \partial_\mu \tilde{\Lambda} = 0, \tag{13б}$$

$$-\partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\Lambda}_\beta = 0, \tag{13в}$$

$$\partial_\mu \Lambda_\mu = 0, \tag{13г}$$

$$\partial_\mu \tilde{\Lambda}_\mu = 0, \tag{13д}$$

которая совместно с системой (11а) – (11д) эквивалентна системе уравнений (10).

Таким образом, в результате калибровочно-инвариантного смешивания (топологического взаимодействия) безмассовых полей, описываемых системами (1), (2), получаются система массивных уравнений Дирака – Кэлера (11а) – (11д) и система (13а) – (13д), представляющая собой безмассовый «фермионный» предел теории Дирака – Кэлера (см. далее п. 4).

3. Установим физический смысл системы (13а) – (13д). Для этого перейдем к импульсному представлению

$$\Lambda_\mu(x) = \int \Lambda_\mu(\underline{p}) e^{ipx} d^3 p + \text{э. с.} \tag{14}$$

$$\tilde{\Lambda}_\mu(x) = \int \tilde{\Lambda}_\mu(\underline{p}) e^{ipx} d^3 p + \text{э. с.} \tag{15}$$

$$\Lambda_{\mu\nu}(x) = \int \Lambda_{\mu\nu}(\underline{p}) e^{ipx} d^3 p + \text{э. с.} \tag{16}$$

$$\Lambda(x) = \int \Lambda(\underline{p}) e^{ipx} d^3 p + \text{э. с.} \tag{17}$$

$$\tilde{\Lambda}(x) = \int \tilde{\Lambda}(\underline{p}) e^{ipx} d^3 p + \text{э. с.} \tag{18}$$

Для подсчета числа независимых состояний разложим функции $\Lambda_\mu(\underline{p})$, $\tilde{\Lambda}_\mu(\underline{p})$, $\Lambda_{\mu\nu}(\underline{p})$ по полному базису $e_\mu^{(1)}$, $e_\mu^{(2)}$, $p_\mu$, $n_\mu$ со свойствами

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, \quad e_\mu^{(i)} p_\mu = 0, \quad e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, \quad p_\mu^{\,2} = 0, \quad n_\mu^{\,2} = -1. \tag{19}$$

(Базис (19) является неортогональным, поскольку содержит изотропный вектор $p_\mu$). Искомые разложения записываются следующим образом:

$$\Lambda_\mu(\underline{p}) = \sum_{i=1}^{2} a_i e_\mu^{(i)} + b\, p_\mu + c\, n_\mu, \tag{20}$$

$$\tilde{\Lambda}_\mu(\underline{p}) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_i e_\mu^{(i)} + \tilde{b}\, p_\mu + \tilde{c}\, n_\mu, \tag{21}$$

$$\Lambda_{\mu\nu}\left(\underline{p}\right) = d\left(e_{\mu}^{(1)} e_{\nu}^{(2)} - e_{\nu}^{(1)} e_{\mu}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{2} f_i \left(e_{\mu}^{(i)} p_{\nu} - e_{\nu}^{(i)} p_{\mu}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{2} g_i \left(e_{\mu}^{(i)} n_{\nu} - e_{\nu}^{(i)} n_{\mu}\right) + h\left(p_{\mu} n_{\nu} - p_{\nu} n_{\mu}\right). \tag{22}$$

Подставляя разложения (14), (20) в уравнение (13г), получим условие

$$\sum_{i=1}^{2} a_i\, p_{\mu}\, e_{\mu}^{(i)} + b\, p_{\mu}^{\ 2} + c\, p_{\mu}\, n_{\mu} \ = \ 0. \tag{23}$$

Первое и второе слагаемые в (23) равны нулю в силу (19), в то же время $p_{\mu}\, n_{\mu} \neq 0$. Отсюда следует

$$c \ = \ 0. \tag{24}$$

Аналогично рассуждая, из уравнения (13д) получим

$$\tilde{c} \ = \ 0. \tag{25}$$

Учтем еще, что система (13) инвариантна относительно преобразований типа (3), (4), которые в импульсном представлении принимают вид

$$\delta\Lambda_{\mu}\left(\underline{p}\right) = i\, p_{\mu}\, \lambda\left(\underline{p}\right), \qquad \delta\tilde{\Lambda}_{\mu}\left(\underline{p}\right) = i\, p_{\mu}\, \tilde{\lambda}\left(\underline{p}\right), \tag{26}$$

где $\lambda\left(\underline{p}\right)$ и $\tilde{\lambda}\left(\underline{p}\right)$ – произвольные функции. Другими словами, величины $\Lambda_{\mu}\left(\underline{p}\right)$, $\tilde{\Lambda}_{\mu}\left(\underline{p}\right)$ определяются с точностью до несущественных слагаемых, в качестве которых в разложениях (20), (21) могут быть выбраны члены $b\, p_{\mu}$, $\tilde{b}\, p_{\mu}$. В результате приходим к разложениям

$$\Lambda_{\mu}\left(\underline{p}\right) \ = \ \sum_{i=1}^{2} a_i\, e_{\mu}^{(i)}, \tag{27}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mu}\left(\underline{p}\right) \ = \ \sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_i\, e_{\mu}^{(i)}, \tag{28}$$

аналогичным тем, которые имеют место для потенциалов электромагнитного поля.

Обратимся теперь к полевым функциям $\Lambda_{\mu\nu}$, $\Lambda$, $\tilde{\Lambda}$. Рассмотрим уравнение (13а). В импульсном представлении с учетом разложения (22) и равенств (19) оно принимает вид условия

$$\sum_{i=1}^{2} g_i \left(p_{\nu}\, n_{\nu}\right) e_{\mu}^{(i)} + h\left(p_{\nu}\, n_{\nu}\right) p_{\mu} + \varphi\left(\underline{p}\right) p_{\mu} \ = \ 0, \tag{29}$$

из которого следует, что

$$g_i \ = \ 0. \tag{30}$$

Из инвариантности системы (13) относительно калибровочных преобразований

$$\delta\Lambda_{\mu\nu} \ = \ \partial_{\mu}\, \lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\, \lambda_{\mu}, \tag{31}$$

где произвольный выбор функций $\lambda_{\mu}\left(x\right)$ ограничен условием

$$\Box\lambda_{\mu} - \partial_{\mu}\, \partial_{\nu}\, \lambda_{\nu} \ = \ 0, \tag{32}$$

вытекает, что в импульсном представлении калибровочная инвариантность (31), (32) делает несущественным слагаемое $\sum_{i=1}^{2} f_i \left(e_{\mu}^{(i)} p_{\nu} - e_{\nu}^{(i)} p_{\mu}\right)$ в разложении (22). В итоге с учетом (30) вместо (22) получаем

$$\Lambda_{\mu\nu}\left(\underline{p}\right) \ = \ d\left(e_{\mu}^{(1)} e_{\nu}^{(2)} - e_{\nu}^{(1)} e_{\mu}^{(2)}\right) + h\left(p_{\mu}\, n_{\nu} - p_{\nu}\, n_{\mu}\right). \tag{33}$$

Теперь найдем плотность энергии, соответствующую обсуждаемой полевой системе (13). Лагранжиан, из которого может быть получена данная система, имеет вид

$$L = -\Lambda_{\mu}\, \partial_{\mu}\, \Lambda - \frac{1}{2}\Lambda_{\mu\nu}\left(\partial_{\mu}\, \Lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\, \Lambda_{\mu}\right) + \tilde{\Lambda}_{\mu}\, \partial_{\mu}\, \tilde{\Lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \Lambda_{\mu\nu}\, \partial_{\alpha}\, \tilde{\Lambda}_{\beta}\,. \tag{34}$$

Отсюда для тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ имеем

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial U_A}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial U_A}{\partial x_\nu} - L\delta_{\mu\nu} =$$

$$= -\Lambda_\mu \partial_\nu \Lambda - \Lambda_{\mu\alpha} \partial_\nu \Lambda_\alpha + \tilde{\Lambda}_\mu \partial_\nu \tilde{\Lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\varsigma\eta\mu\alpha} \Lambda_{\varsigma\eta} \partial_\nu \tilde{\Lambda}_\alpha + \tag{35}$$

$$+ \delta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha \partial_\alpha \Lambda + \delta_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha\beta} \partial_\alpha \Lambda_\beta - \delta_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_\alpha \partial_\alpha \tilde{\Lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{2}\varepsilon_{\varsigma\eta\alpha\beta} \Lambda_{\varsigma\eta} \partial_\alpha \tilde{\Lambda}_\beta .$$

Из (35) следует, что

$$T_{44} = \Lambda_j \partial_j \Lambda - \tilde{\Lambda}_j \partial_j \tilde{\Lambda} + \Lambda_{j\alpha} \partial_j \Lambda_\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu j\alpha} \Lambda_{\mu\nu} \partial_j \tilde{\Lambda}_\alpha , \tag{36}$$

где индекс $j$ пробегает значения от 1 до 3.

Подставляя в (36) разложения (14) – (18), (27), (28), (33) и учитывая соотношения (19), получим $T_{44} = 0$. Данный результат означает, что система (13) не соответствует какому-либо физическому полю. Функции $\Lambda_\mu$, $\tilde{\Lambda}_\mu$, $\Lambda_{\mu\nu}$, $\Lambda$, $\tilde{\Lambda}$, введенные посредством определений (12), играют в обсуждаемой теории роль калибровочных («духов»). Следовательно, единственной физической системой уравнений, получающейся при смешивании систем (1), (2) способом (8), является система массивных уравнений Дирака – Кэлера.

Итак, в результате смешивания двух безмассовых полей, описываемых системами уравнений (1), (2), получается система для массивной частицы с удвоенным набором состояний со спинами 0 и 1. При этом полное число степеней свободы, равное 8 (без учета античастиц), сохраняется: нотофы «передают» свою степень свободы состоянию массивной частицы со спином 1 и нулевой проекцией. Согласно основной идее $\hat{B} \wedge \hat{F}$ -теории так и должно быть, поскольку используемая процедура смешивания исходных безмассовых систем (1), (2) не нарушает их калибровочной инвариантности.

4. Рассмотрим матричную трактовку процедуры, описанной в п. 1, 2, обобщив ее на случай комплексных полей.

Исходные полевые системы (1), (2) в матричной форме имеют вид

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + P_\Phi\right) \Phi = 0, \tag{1$'$}$$

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + P_\Psi\right) \Psi = 0, \tag{2$'$}$$

где матрицы $\Gamma_\mu$ размерности 16×16 удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака, $P_\Phi$ и $P_\Psi$ – проективные операторы со свойствами

$$\begin{gathered} P_\Phi^{\,2}\left(P_\Psi^{\,2}\right) = P_\Phi\left(P_\Psi\right), \quad P_\Phi + P_\Psi = I, \quad P_\Phi P_\Psi = 0, \\ P_\Phi\left(P_\Psi\right)\Gamma_\mu + \Gamma_\mu P_\Phi\left(P_\Psi\right) = \Gamma_\mu . \end{gathered} \tag{37}$$

При этом предполагается, что волновые функции $\Phi$ и $\Psi$, которые состоят из тензорных компонент соответствующих полевых систем, имеют одну и ту же структуру, а именно:

$$\Phi\colon \varphi_\mu,\ \tilde{\varphi}_\mu,\ \varphi_{\mu\nu},\ \varphi,\ \tilde{\varphi}, \tag{38а}$$

$$\Psi\colon \psi_\mu,\ \tilde{\psi}_\mu,\ \psi_{\mu\nu},\ \psi,\ \tilde{\psi}. \tag{38б}$$

Лагранжиан $L_0$ совместно рассматриваемых уравнений (1), (2), а также лагранжиан $L_{\text{int}}$ (8) с точностью до полной дивергенции и с учетом комплексного характера функций $\Phi$ и $\Psi$ могут быть записаны следующим образом:

$$L_0 = -\overline{\Phi}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + P_\Phi\right)\Phi - \overline{\Psi}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + P_\Psi\right)\Psi, \tag{39}$$

$$L_{\text{int}} = -m\overline{\Phi} P_\Psi \Psi - m\overline{\Psi} P_\Phi \Phi, \tag{40}$$

где $\overline{\Phi} = \Phi^{+}\Gamma_4\Gamma_4'$, $\overline{\Psi} = \Psi^{+}\Gamma_4\Gamma_4'$ (определение $\Gamma_4'$ см. в п. 5). Вытекающие из полного лагранжиана $L = L_0 + L_{\text{int}}$ матричные релятивистские волновые уравнения (РВУ) имеют вид

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Phi + P_\Phi \Phi + m P_\Psi \Psi = 0, \tag{41}$$

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi + P_\Psi \Psi + m P_\Phi \Phi = 0. \tag{42}$$

Умножая (41) слева на матрицу $P_\Psi$ и используя свойства (37), получаем уравнение

$$\Gamma_\mu \partial_\mu P_\Phi \Phi + m P_\Psi \Psi = 0. \tag{43}$$

Аналогично, умножая (42) слева на $P_\Phi$, имеем

$$\Gamma_\mu \partial_\mu P_\Psi \Psi + m P_\Phi \Phi = 0. \tag{44}$$

Складывая (43) и (44) и вводя обозначение

$$\Psi' = P_\Phi \Phi + P_\Psi \psi = \left(\psi_\mu,\ \tilde{\psi}_\mu,\ \varphi_{\mu\nu},\ \varphi,\ \tilde{\varphi}\right), \tag{45}$$

получим уравнение Дирака – Кэлера

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi' + m\Psi' = 0, \tag{46}$$

являющееся матричным эквивалентом системы (11а) – (11д). Если умножить (41) слева на $P_\Phi$, а (42) на $P_\Psi$, то с учетом (37) придем соответственно к уравнениям

$$\Gamma_\mu \partial_\mu P_\Psi \Phi + P_\Phi \Phi = 0, \tag{47}$$

$$\Gamma_\mu \partial_\mu P_\Phi \Psi + P_\Psi \Psi = 0. \tag{48}$$

Сложение (47) и (48) дает

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Phi' + \Psi' = 0, \tag{49}$$

где

$$\Phi' = P_\Psi \Phi + P_\Phi \Psi. \tag{50}$$

Матричное РВУ (49) эквивалентно тензорной системе (11е) – (11к).

Умножая, наконец, (49) на $m$ и вычитая из (46), для волновой функции

$$\Lambda' = \Psi' - m\Phi' = \left(\Lambda_\mu,\ \tilde{\Lambda}_\mu,\ \Lambda_{\mu\nu},\ \Lambda,\ \tilde{\Lambda}\right) \tag{51}$$

получаем уравнение

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Lambda' = 0, \tag{52}$$

соответствующее тензорной системе (13а) – (13д). С помощью аналогичных преобразований лагранжиан (40) можно привести к виду

$$L = -\overline{\Psi'}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi' - \overline{\Lambda'}\Gamma_\mu \partial_\mu \Lambda',$$

из которого также следуют уравнения (46), (52).

Формально уравнение вида (52) следует из уравнения Дирака – Кэлера (46) при $m = 0$. Такой переход к безмассовому полю и называют «фермионным» пределом, поскольку он соответствует методу получения безмассового уравнения Дирака. Однако, как следует из изложенного ранее, при тензорной интерпретации уравнения Дирака – Кэлера такая безмассовая полевая система не соответствует какому-либо физическому полю. Бозонные безмассовые пределы уравнения Дирака – Кэлера соответствуют выбору одного из двух указанных типов проективных матриц.

5. Безмассовые полевые системы (1), (2), процедура их смешивания и система Дирака – Кэлера (11а) – (11д) обладают внутренней (диальной) [9] симметрией. В рамках тензорной формулировки установление и описание этой симметрии является непростой задачей.

Лагранжиан поля Дирака – Кэлера инвариантен относительно группы внутренней (диальной) симметрии SO(4,2) [9], преобразования которой в матричном подходе задаются генераторами

$$\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]},\ \Gamma'_5\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_5,$$

где $\Gamma'_\mu$ – второй набор матриц размерностью $16\times16$, которые, так же как и $\Gamma_\mu$, удовлетворяют алгебре матриц Дирака и взаимно коммутируют с матрицами $\Gamma_\mu$. В этих свойствах нетрудно убедиться, поскольку всегда можно выбрать $\Gamma_\mu$ и $\Gamma'_\mu$ в следующем виде: $\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu$, $\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4$, где $\gamma_\mu$ – матрицы Дирака размерности $4\times4$, $I_4$ – соответствующая единичная матрица. Для вещественного поля эта симметрия сужается до группы SO(3,2), генераторы которой могут быть заданы матрицами $\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}$, $\Gamma'_5\Gamma'_\mu$. При использовании явного вида матриц $\Gamma_\mu, \Gamma'_\mu$ и проективных операторов $P_\Phi, P_\Psi$

можно установить, что системы $(1')$ и $(2')$ и их лагранжианы инвариантны относительно преобразований подгруппы диальной симметрии SO(3,1), генераторы которых определяются матрицами $\Gamma'_{[i}\,\Gamma'_{k]}$, $\Gamma'_5\,\Gamma'_k$.

В заключение вновь отметим, что уравнение Дирака – Кэлера для частиц с массой может быть представлено как результат калибровочно-инвариантного смешивания двух безмассовых систем – диально симметричных обобщений электромагнитного поля и поля Кальба – Рамонда (нотофа). Рассмотрения аналогичного механизма для тензорных полей (абелев случай) различной валентности в пространстве $d$=4, известные в литературе, являются частными случаями развитого подхода.

1. Cremmer E., Scherk J. // Nucl. Phys. 1974. Vol. B72. P. 117.
2. Kalb M., Ramond P. // Phys. Rev. 1974. Vol. D9. № 8. P. 2273.
3. Aurilia A., Takahashi Y. // Progr. Theor. Phys. 1981. Vol. 66. № 2. P. 693.
4. Birmingham D. et al. // Phys. Rev. 1991. Vol. 209. C. P. 129.
5. Khoudeir A. // Phys. Rev. 1999. Vol. D59. P. 027702.
6. Smailagic A., Spalucci M. // Phys. Rev. 2000. Vol. D61. P. 067701.
7. Bizdadea C. et al. // arXiv:0704.2656v1. [hep-th] 20 Apr. 2007.
8. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. // Ядерная физика. 1966. Т. 4. Вып. 1. С. 216.
9. Стражев В.И., Сатиков И.А., Ционенко Д.А. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле. Мн., 2007.
10. Боргардт А.А. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. № 2. С. 334.
11. Плетюхов В.А., Стражев В.И. // 5-th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky: Methods of Non-Euclidean Geometry in Modern Physics. Minsk, 2006. P. 102.

Поступила в редакцию 17.04.08.

***Владимир Анестиевич Плетюхов*** – доктор физико-математических наук, профессор БрГУ им. А.С. Пушкина.
***Василий Иванович Стражев*** – доктор физико-математических наук, профессор.