МНОГОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА С ФАЗОВЫМ ТИПОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

В. В. Мушко

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: vmushko@tut.by

Рассматривается многолинейная система с групповым марковским входным потоком, фазовым обслуживанием и повторными вызовами. Интенсивность повторных вызовов линейно зависит от числа вызовов на орбите. Для исследования системы применен метод Рамасвами, который состоит в отслеживании числа приборов, занятых на каждой фазе обслуживания, вместо учитывания фазы, на которой находится каждый занятый прибор. Найдено достаточное условие существования стационарного распределения. Получены основные характеристики функционирования системы.

Ключевые слова: многолинейная система, групповой марковский входной поток, фазовое обслуживание, повторные вызовы, стационарное распределение.

ВВЕДЕНИЕ

В работе применен альтернативный метод исследования многолинейной системы с фазовым обслуживанием и повторными вызовами, предложенный в [6, 7]. В соответствии с этим методом вместо "наблюдения" за номером фазы каждого занятого прибора "отслеживается" число приборов, занятых на каждой фазе обслуживания. Так в [1, 2] для исследования этой системы вводится многомерный процесс $\zeta_t = \{i_t, n_t, \nu_t, \eta_t^{(1)}, \dots, \eta_t^{(n_t)}\}$, $t \geq 0$, где $\eta_t^{(l)}$ – номер фазы обслуживания, на которой находится l-й прибор в момент времени t, $t \geq 0$, $l = \overline{1,c}$. Положительной особенностью подхода, используемого в [1, 2], является относительная простота аналитических результатов. Основным недостатком – необходимость работы с матрицами большой размерности. Так, размерность матриц, участвующих в вычислениях векторов стационарных вероятностей, равна $J = \overline{W}\left(1 - M^{c+1}\right)/\left(1 - M\right)$. Например, для $c = 15, M = 2, \overline{W} = 2$ имеем $J = 131070$. Расчеты с матрицами таких размерностей практически невозможны на персональных компьютерах. В то же время, метод из [6, 7] позволяет значительно сократить данную размерность. Для тех же параметров системы размерность матриц $J = 272$ и вычисляется следующим образом: $J = \overline{W}\binom{c+M}{M}$.
Таким образом, метод из [6, 7] дает возможность проводить анализ систем с большим числом приборов.

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается многолинейная система, имеющая $c, c > 0$, идентичных приборов. Время обслуживания вызова на каждом приборе имеет распределение фазового типа (Phase-type, PH -type, см., например, [5]). Процессом обслуживания управляет цепь Маркова (ЦМ) $\eta_t, t \geq 0$, с непрерывным временем. Состояние процесса $\eta_t, t \geq 0$, в момент начала обслуживания определяется стохастическим вектором-строкой $\beta = (\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_M)$. Переходы процесса $\eta_t, t \geq 0$, которые не приводят к завершению обслуживания, определяются квадратной матрицей S размерности M. Диагональные элементы матрицы S отрицательны и $-S_{\eta,\eta} = s_\eta, s_\eta > 0, \eta = \overline{1, M}$, определяет параметр экспоненциально распределенного времени пребывания процесса $\eta_t, t \geq 0$, в состоянии η, $|S_{\eta,\eta}| < \infty, \eta = \overline{1, M}$. Недиагональные элементы матрицы S определяют интенсивности переходов процесса $\eta_t, t \geq 0$, в пространстве состояний $\{1, \ldots, M\}$. Значения $-\sum_{\eta'=1}^{M} S_{\eta,\eta'}$ определяют интенсивности перехода процесса $\eta_t, t \geq 0$, из состояния η в абсорбирующее состояние. Момент перехода процесса $\eta_t, t \geq 0$, в абсорбирующее состояние определяет момент завершения обслуживания. Интенсивности переходов, которые приводят к завершению обслуживания, определяются вектором-столбцом $S_0 = -Se$, где e – вектор-столбец, состоящий из единиц. Предполагается, что все компоненты вектора S_0 неотрицательны и, по крайней мере, одна из них положительна. Предполагается также, что матрица $S + S_0\beta$ является неприводимой. Среднее время обслуживания b_1 произвольного вызова определяется равенством $b_1 = \beta(-S)^{-1}e$. Коэффициент вариации c_{var} времени обслуживания произвольного вызова задается формулой $c_{\text{var}} = \dfrac{\sqrt{b_2 - (b_1)^2}}{b_1}$, где $b_2 = 2\beta(-S)^{-2}e$.

Поток вызовов, входящий в систему, является групповым марковским входным потоком (Batch Markovian Arrival Process, $BMAP$, см., например, [4]). Прибытием вызовов в $BMAP$-потоке управляет неприводимая ЦМ $\nu_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и с пространством состояний $\{0, 1, \ldots, W\}$. Время пребывания ЦМ $\nu_t, t \geq 0$, в состоянии ν имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_ν, $\nu = \overline{0, W}$. По истечении этого времени с вероятностью $p_0(\nu, \nu')$ ЦМ переходит в состояние ν', и этот переход не сопровождается поступлением вызова, с вероятностью $p_k(\nu, \nu')$ ЦМ переходит в состояние ν', и в систему поступает k вызовов, $\nu' = \overline{0, W}$. Введенные вероятности удовлетворяют условиям

$$p_0(\nu, \nu) = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu'=0}^{M} p_k(\nu, \nu') + \sum_{\nu'=0, \nu' \neq \nu}^{M} p_0(\nu, \nu') = 1, \nu = \overline{0, W}.$$

ЦМ $\nu_t, t \geq 0$, называют управляющим процессом $BMAP$-потока.

Параметры, определяющие $BMAP$-поток, удобно хранить в виде квадратных матриц $D_k, k \geq 0$, размерности $\overline{W} = W + 1$, определяемых следующим образом:

$$(D_0)_{\nu,\nu} = -\lambda_\nu, (D_0)_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu p_0(\nu, \nu'), \nu' \neq \nu, \ \nu, \nu' = \overline{0, W}, \ (D_k)_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu, \nu'), \ \nu, \nu' = \overline{0, W}, k \geq 1.$$

Информацию о $BMAP$-потоке оказывается удобным хранить в виде их матричной производящей функции $D(z)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, |z| \le 1$. Отметим, что значение этой производящей функции в точке $z=1$ – матрица $D(1)$ – является инфинитезимальным генератором (ИГ) управляющего процесса $\nu_t, t \ge 0$. То есть вектор-строка θ стационарных вероятностей этого процесса определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений вида $\theta D(1)=\boldsymbol{0}, \theta \boldsymbol{e}=1$, где $\boldsymbol{0}$ – вектор-строка, состоящий из нулей. Средняя интенсивность λ поступления вызовов в $BMAP$-потоке задается формулой $\lambda=\theta\sum_{k=1}^{\infty} kD_k\boldsymbol{e}$. Средняя интенсивность λ_b поступления группы вызовов в $BMAP$-потоке определяется как $\lambda_b=\theta(-D_0)\boldsymbol{e}$. Квадрат коэффициента вариации c_{var} интервала времени между поступлениями соседних групп вызовов задается формулой $(c_{\text{var}})^2=2(\lambda_b)^{-1}\theta(-D_0)^{-1}\boldsymbol{e}-(\lambda_b)^{-2}$. Коэффициент корреляции c_{cor} двух последовательных интервалов времени между прибытиями соседних групп вызовов находится как $c_{\text{cor}}=\left((\lambda_b)^{-1}\theta(-D_0)^{-1}(D(1)-D_0)(-D_0)^{-1}\boldsymbol{e}-(\lambda_b)^{-2}\right)/(c_{\text{var}})^2$.

Если в момент прибытия группы первичных вызовов в системе имеются свободные обслуживающие приборы, то первичные вызовы занимают их. Вызовы, для которых не нашлось свободных обслуживающих приборов, направляются в некоторую виртуальную динамическую область, называемую орбитой, и пытаются получить обслуживание позже. Каждый вызов, находящийся на орбите, совершает повторные попытки попасть на обслуживание через интервалы времени, имеющие экспоненциально распределенную длину с параметром $\alpha, \alpha > 0$, независимо от других вызовов. Если в момент повтора имеется один или несколько свободных приборов, то вызов занимает один из них и покидает систему после обслуживания. Если в момент повтора все приборы заняты, то повторный вызов возвращается на орбиту. Вызовы с орбиты являются абсолютно настойчивыми.

ЦЕПЬ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Пусть

- $i_t, t \ge 0$, – число вызовов на орбите в момент времени t, $i_t \ge 0$;
- $n_t, t \ge 0$, – число занятых приборов в момент времени t, $n_t=\overline{0,c}$;
- $\nu_t, t \ge 0$, – состояние управляющего процесса $BMAP$-потока в момент времени t, $\nu_t=\overline{0,W}$;
- $h_t^{(\eta)}, t \ge 0$, – число приборов, обслуживающих вызов на η-й фазе, в момент времени t, $h_t^{(\eta)} \in \{0,\dots,n_t\}, \eta=\overline{1,M}, \sum_{\eta=1}^{M} h_t^{(\eta)}=n_t, n_t=\overline{0,c}$.

Под состоянием системы в момент времени $t, t \ge 0$, будем понимать вектор $(i_t,n_t,\nu_t,h_t^{(1)},\dots,h_t^{(M)}), t \ge 0$. Рассмотрим процесс $\zeta_t, t \ge 0$, описывающий изменение состояний системы, $\zeta_t=\{i_t,n_t,\nu_t,h_t^{(1)},\dots,h_t^{(M)}\}, t \ge 0$. Обозначим через J размерность пространства состояний процесса $\{n_t,\nu_t,h_t^{(1)},\dots,h_t^{(M)}\}, t \ge 0$. Очевидно, что $J=\overline{W}\binom{c+M}{M}$.

Обозначим через Q ИГ процесса $\zeta_t, t \geq 0$.

Упорядочим состояния процесса $\zeta_t, t \geq 0$, в лексикографическом порядке возрастания компонент (i_t, n_t, ν_t) и убывания компонент $\left(h_t^{(1)}, \ldots, h_t^{(M)}\right)$. Такой способ упорядочивания позволит нам использовать далее результаты работ [6, 7].

Обозначим стационарное распределение процесса $\zeta_t, t \geq 0$, через

$$p\left(i, n, \nu, h^{(1)}, \ldots, h^{(M)}\right) = \lim_{t \to \infty} P\left\{i_t = i, n_t = n, \nu_t = \nu, h_t^{(1)} = h^{(1)}, h_t^{(M)} = h^{(M)}\right\},$$

$$i \geq 0, n = \overline{0, c}, \nu = \overline{0, W}, h^{(\eta)} \in \{0, \ldots, n\}, \eta = \overline{1, M}, \sum_{\eta=1}^{M} h^{(\eta)} = n.$$

Условие существования пределов приведено ниже и предполагается далее выполненным.

Введем векторы $\boldsymbol{p}_i$ стационарных вероятностей $p\left(i, n, \nu, h^{(1)}, \ldots, h^{(M)}\right), i \geq 0$, соответствующие наличию $i, i \geq 0$, вызовов на орбите. Обозначим также $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_i, \ldots)$. Вектор $\boldsymbol{p}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\boldsymbol{p}Q = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{p}\boldsymbol{e} = 1. \tag{1}$$

Определим интенсивности переходов между состояниями процесса $\zeta_t, t \geq 0$.

1. Переход управляющего процесса *BMAP*-потока из состояния ν в состояние ν' с генерацией пакета из k вызовов.

2. Переход управляющего процесса *BMAP*-потока из состояния ν в состояние ν' без генерации вызовов.

3. Выход из состояния (i, n, ν, h).

4. Изменение фазы обслуживания с η на η' на одном из занятых приборов без завершения обслуживания.

5. Завершение обслуживания одним из занятых приборов на фазе η.

6. Поступление вызова с орбиты на фазу η свободного прибора.

7. Поступление k вызовов на орбиту.

Интенсивности переходов в соответствующие состояния процесса $\zeta_t, t \geq 0$, приведены в таблице 1. Символом $\boldsymbol{e}_j$ обозначается вектор размерности M, все элементы которого равны нулю, кроме j-го элемента, равного единице, $h = \left(h^{(1)}, \ldots, h^{(M)}\right)$.

Таблица 1

№	Состояние	Интенсивность перехода	Условие
1	$\left(i, n+k, \nu', h + \boldsymbol{e}_{j_1} + \cdots + \boldsymbol{e}_{j_k}\right)$	$(D_k)_{\nu,\nu'}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_k}$	$n = \overline{0, c-1}, k = \overline{1, c-n}$
2	(i, n, ν', h)	$(D_0)_{\nu,\nu'}$	$n = \overline{0, c}, \nu \neq \nu'$
3	(i, n, ν, h)	$(D_0)_{\nu,\nu} + S_{j_1,j_1} + \cdots + S_{j_n,j_n} - i\alpha(1 - \delta_{n,c})$	$n = \overline{0, c}$
4	$(i, n, \nu, h - \boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{e}_{\eta'})$	$S_{\eta,\eta'}$	$n \neq 0, \eta \neq \eta'$
5	$(i, n, \nu, h - \boldsymbol{e}_\eta)$	$(S_0)_\eta$	$n \neq 0$
6	$(i-1, n+1, \nu, h + \boldsymbol{e}_\eta)$	$i\alpha\beta_\eta$	$n \neq c, i \neq 0$
7	$(i+k, c, \nu', h)$	$(D_{c+k-n})_{\nu,\nu'}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_{c-n}}$ $(D_k)_{\nu,\nu'}$	$n = \overline{0, c-1}, k \geq 1$ $n = c, k \geq 1$

Лемма. ИГ Q процесса $\zeta_t = \{i_t, n_t, \nu_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}\}, t \geq 0$. имеет блочную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & Q_{0,2} & Q_{0,3} & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & \cdots \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \cdots \\ O & O & Q_{3,2} & Q_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ненулевые блоки ИГ Q определяются следующим образом:

$$\left(Q_{i,i}\right)_{n,n'} = \begin{cases} O, & n' = \overline{0, n-2}, \quad n = \overline{2, c}; \\ I_{\bar{W}} \otimes L_{c-n}\left(c, \widetilde{S}\right), & n' = n-1, \quad n = \overline{1, c}; \\ D_0 \oplus A_n(c, S) + I_{\bar{W}} \otimes \Delta^{(n)} - i\alpha\left(1 - \delta_{n,c}\right) I_{\bar{W}L(n)}, & n' = n, \quad n = \overline{0, c}; \\ D_{n'-n} \otimes P_{n,n'}(\beta), & n' = \overline{n+1, c}, \quad n = \overline{0, c-1}, \end{cases} \quad i \geq 0,$$

$$\left(Q_{i,i-1}\right)_{n,n'} = i\alpha \begin{cases} I_{\bar{W}} \otimes P_{n,n'}(\beta), & n' = n+1, \quad n = \overline{0, c-1}; \\ O, & \text{иначе}, \end{cases} \quad i \geq 1,$$

$$\left(Q_{i,i+k}\right)_{n,n'} = \begin{cases} D_{c+k-n} \otimes P_{n,c}(\beta), & n' = c, \quad n = \overline{0, c-1}; \\ D_k \otimes I_{L(c)}, & n' = c, \quad n = c; \\ O & \text{иначе}, \end{cases} \quad i \geq 0, k \geq 1,$$

где

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & O \\ S_0 & S \end{pmatrix}, \quad \delta_{n,c} = \begin{cases} 1, & n = c; \\ 0, & n \neq c, \end{cases} \quad L(n) = \begin{pmatrix} n + M - 1 \\ M - 1 \end{pmatrix}, n = \overline{0, c},$$

$$P_{n,n'}(\beta) = P_n(\beta) P_{n+1}(\beta) \cdots P_{n'-1}(\beta), \; 0 \leq n < n \leq c,$$

O – нулевая матрица, размерность которой ясна из контекста, I_j – тождественная матрица размерности j, $\otimes$ – операция Кронекерова произведения матриц, $\oplus$ – операция Кронекеровой суммы матриц, $\Delta^{(n)}$, $n = \overline{0, c}$, – диагональная матрица, такая, что $Qe = \mathbf{0}$.

Размерность блока с индексами n, n' равна $\bar{W}L(n) \times \bar{W}L(n')$. Детальное описание матриц $P_n(\beta)$, $A_n(c, S)$, $L_{c-n}\left(c, \widetilde{S}\right)$ и алгоритм их вычисления могут быть найдены в работах [6, 7]. Очевидно, что процесс $\zeta_t, t \geq 0$, является ЦМ с непрерывным временем.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА УСЛОВИЕ СТАЦИОНАРНОСТИ

Определим условие существования стационарного распределения ЦМ $\zeta_t, t \geq 0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Стационарное распределение ЦМ $\zeta_t = \{i_t, n_t, \nu_t, h_t^{(1)}, \dots, h_t^{(M)}\}, t \geq 0$, существует, если выполнено следующее условие:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{2}$$

где величина λ имеет смысл средней интенсивности поступления первичных вызовов в *BMAP*-потоке,

$$\bar{\mu} = yL_0\left(c,\widetilde{S}\right)e, \tag{3}$$

где вектор y является единственным решением системы уравнений

$$y\left(A_c(c,S)+\Delta^{(c)}+L_0\left(c,\widetilde{S}\right)P_{c-1,c}(\beta)\right)=0,\ ye=1. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что ЦМ $\zeta_t, t\geq 0$, описывающая поведение системы, принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова (АКТЦМ) с непрерывным временем. Доказательство этого факта следует из определения АКТЦМ с непрерывным временем, приведенного в [3], и вида ИГ. Поэтому для установления условия существования стационарного распределения и вычисления вектора p стационарных вероятностей может быть применен аппарат АКТЦМ с непрерывным временем.

Обозначим через $\widetilde{Y}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\widetilde{Y}_k z^k,\ |z|\leq 1$, матричную производящую функцию, где

$$\widetilde{Y}_k=\lim_{i\to\infty}P_{i,i+k-1},\ k\geq 0,\ \ P_{i,i-1}=R_i^{-1}Q_{i,i-1},\ P_{i,i}=I+R_i^{-1}Q_{i,i},\ P_{i,i+k}=R_i^{-1}Q_{i,i+k},$$

$$R_i=C+i\alpha\hat{I},\ C=\operatorname{diag}\left\{\operatorname{diag}\left\{\lambda_\nu,\ \nu=\overline{0,W}\right\}\oplus\left\{-\Delta^{(n)},\ n=\overline{0,c}\right\}\right\},$$

$$\hat{I}=\begin{pmatrix} I_{\bar{W}l(0)} & O & \cdots & O & O\\ O & I_{\bar{W}l(1)} & \cdots & O & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ O & O & \cdots & I_{\bar{W}l(c-1)} & O\\ O & O & \cdots & O & O_{\bar{W}l(c)}\end{pmatrix}.$$

Можно показать, что матричная производящая функция $\widetilde{Y}(z)$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{Y}(z)=\widetilde{I}_\beta+z\bar{I}+z\bar{I}C^{-1}\left(Q^*+Q_k^* z^k\right),\ |z|\leq 1,$$

где

$$\widetilde{I}_\beta=\begin{pmatrix} O & I_{\bar{W}}\otimes P_{0,1}(\beta) & O & \cdots & O\\ O & O & I_{\bar{W}}\otimes P_{1,2}(\beta) & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & O & \cdots & I_W\otimes P_{c-1,c}(\beta)\\ O & O & O & \cdots & O\end{pmatrix},\ Q_k^*=\begin{pmatrix} O & \cdots & O & D_{c+k}\otimes P_{0,c}(\beta)\\ O & \cdots & O & D_{c+k-1}\otimes P_{1,c}(\beta)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ O & \cdots & O & D_{k-1}\otimes P_{c-1,c}(\beta)\\ O & \cdots & O & D_k\otimes I_{l(c)}\end{pmatrix},$$

$$\bar{I}=I-\hat{I},\ \left(Q^*\right)_{n,n'}=\begin{cases} O, & n'=\overline{0,n-2},\quad n=\overline{2,c};\\ I_{\bar{W}}\otimes L_{c-n}\left(c,\widetilde{S}\right), & n'=n-1,\quad n=\overline{1,c};\\ D_0\oplus A_n(c,S)+I_{\bar{W}}\otimes\Delta^{(n)}, & n'=n,\quad n=\overline{0,c};\\ D_{n'-n}\otimes P_{n,n'}(\beta), & n'=\overline{n+1,c},\quad n=\overline{0,c-1}.\end{cases}$$

Очевидно, что матрица $\widetilde{Y}(1)$ является разложимой. Переставляя известным образом (см., например, [8]) строки и столбцы в матрице $\widetilde{Y}(z)$, приводим ее к нормальной форме. Можно проверить, что единственный стохастический неприводимый блок в нормальной форме разложимой матрицы $\widetilde{Y}(1)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\tilde{Y}}(z)=\begin{pmatrix} (C^*)^{-1}(zD(z)\oplus z(A_c(c,S)+\Delta^{(c)}))+zI & (C^*)^{-1}(I_{\overline{W}}\otimes L_0(c,\tilde{S}))z \\ I_{\overline{W}}\otimes P_{c-1,c}(\beta) & O \end{pmatrix}.$$

Как следует из [3], достаточным условием существования стационарного распределения ЦМ $\zeta_t, t\geq 0$, является выполнение неравенства

$$\left(\det\left(zI-\tilde{\tilde{Y}}(z)\right)\right)'\Big|_{z=1}>0. \tag{5}$$

Используя блочную структуру определителя $\det\left(zI-\tilde{\tilde{Y}}(z)\right)$, можно привести его к виду

$$\det\left(zI-\tilde{\tilde{Y}}(z)\right)=\det(C^*)^{-1}z^{\overline{W}L(c-1)}\det\left(-z\left(D(z)\oplus(A_c(c,S)+\Delta^{(c)})\right)-\left(I_{\overline{W}}\otimes L_0(c,\tilde{S})\right)\left(I_{\overline{W}}\otimes P_{c-1,c}(\beta)\right)\right).$$

Нетрудно показать, что определитель $\det(C^*)^{-1}$ положителен, а второй определитель обращается в нуль в точке $z=1$, поэтому неравенство (5) эквивалентно следующему неравенству:

$$\det(T(z))'\Big|_{z=1}>0, \tag{6}$$

где

$$T(z)=-z\left(D(z)\oplus(A_c(c,S)+\Delta^{(c)})\right)-\left(I_{\overline{W}}\otimes L_0(c,\tilde{S})\right)\left(I_{\overline{W}}\otimes P_{c-1,c}(\beta)\right). \tag{7}$$

Из [3] следует, что условие (6) сводится к условию

$$xT'(1)e>0, \tag{8}$$

где вектор-строка x удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$xT(1)=\boldsymbol{0},\ xe=1. \tag{9}$$

Используя (7), перепишем (8) и (9) в виде

$$x\left((D(1)+D'(1))\oplus(A_c(c,S)+\Delta^{(c)})\right)e<0, \tag{10}$$

$$x\left(D(1)\oplus(A_c(c,S)+\Delta^{(c)}+L_0(c,\tilde{S})P_{c-1,c}(\beta))\right)=\boldsymbol{0},\ xe=1. \tag{11}$$

Нетрудно убедится, что вектор $x=\theta\otimes y$ удовлетворяет (11), если вектор y является решением системы (4). Теорема доказана.

Если выполняется условия (2)–(4) теоремы, то стационарное распределение ЦМ $\zeta_t, t\geq 0$, может быть найдено при помощи алгоритма из [3].

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

Вычислив векторы $\boldsymbol{p}_i, i\geq 0$, стационарных вероятностей, можно выписать следующие стационарные характеристики функционирования системы:

- среднее число L_s занятых приборов находится как

$$L_s=\sum_{n=1}^{c}n[P(1)]_n e,\ P(1)=\sum_{i=0}^{\infty}\boldsymbol{p}_i.$$

Здесь и далее обозначение $[x]_n$ имеет следующий смысл. Пусть вектор x имеет блочную структуру с размерностью блоков (подвекторов), равной $\overline{W}L(n)$, $n=\overline{0,c}$, а именно $x=(x_0\ \cdots\ x_c)$. Положим далее $[x]_n=x_n$. Следовательно, $[P(1)]_n$ является частью вектора $P(1)$, соответствующей состоянию ЦМ $\zeta_t, t \geq 0$, когда занято $n, n = \overline{0,c}$, приборов.

- среднее число L_0 вызовов на орбите задается формулой $L_0 = \sum_{i=0}^{\infty} i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{e}$;
- среднее число L вызовов в системе находится как $L = L_s + L_0$;
- вероятность P_0 того, что орбита пуста определяется как $P_0 = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{e}$;
- вероятность P_{hit} того, что произвольный вызов получит обслуживание немедленно после прибытия в систему задается формулой

$$P_{hit} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{c}[P(1)]_{c-n}\left(\sum_{k=0}^{n}(k-n)D_k \otimes I_{L(c-n)}\right)\boldsymbol{e}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложен альтернативный метод построения процесса, описывающего изменение состояний системы, позволяющий исследовать многолинейную систему с фазомым типом обслуживания и повторными вызовами, значительно сократив при этом размерность матриц, участвующих в вычислениях векторов стационарных вероятностей, тем самым решая в некоторой степени проблему, связанную с переполнением памяти ПЭВМ, не ориентированных на проведение значительных вычислительных работ. Найдено достаточное условие существования стационарного распределения вероятностей, получены основные стационарные характеристики функционирования системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Breuer, L.* A retrial BMAP/PH/N system / L. Breuer, A. N. Dudin, V. I. Klimenok // Queueing Systems. 2002. V. 40. P. 433–457.

2. *Breuer, L.* Modeling the access to a wireless network at hot spots / L. Breuer [et al.] // European Transactions on Telecommunications. 2005. V. 16. P. 309–316.

3. *Klimenok, V. I.* Multi-dimensional asymptotically quasi-toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V. I. Klimenok, A. N. Dudin // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 245–259.

4. *Lucantoni, D. M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D. M. Lucantoni // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.

5. *Neuts, M.* Matrix-geometric solutions in stochastic models / M. Neuts. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.

6. *Ramaswami, V.* Independent Markov process in parallel / V. Ramaswami // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. V. 1. № 3. P. 419–432.

7. *Ramaswami, V.* Algorithm for the multi-server queue with phase-type service / V. Ramaswami, D. M. Lucantoni // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. V. 1. № 3. P. 393–417.

8. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М. : Наука, 1967. 576 с.