СЕТИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ТРЕБОВАНИЙ И СИГНАЛОВ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ

Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович

Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: malinkovsky@gsu.by
yakubovich@gsu.by

Рассматривается модель открытой сети, в которую поступает несколько типов положительных требований и несколько типов сигналов, которые могут оказать на узлы воздействия трех видов: уменьшают длину очереди на единицу, увеличивают длину очереди на единицу или не производят никакого изменения. Время ожидания в очереди узла для положительных требований каждого типа ограничено экспоненциальной случайной величиной. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний сети в мультипликативной форме.

Ключевые слова: открытая сеть, положительные требования и сигналы нескольких типов, ограниченное время ожидания, стационарное распределение.

ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделям разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных и многих других объектах. В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания центральным всегда является вопрос об определении стационарного распределения, которое является
отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. Стационарное распределение сети находится в форме произведения множителей, характеризующих отдельные узлы, поскольку в настоящее время это остается единственной возможностью точного нахождения инвариантной меры многомерного процесса, описывающего поведение сети массового обслуживания. В последнее время появляется все больше новых интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности и возможность применения к новым реальным объектам, имеющим сетевую структуру. В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступает несколько типов положительных требований и несколько типов сигналов, которые могут оказать на узлы воздействия трех видов: уменьшают длину очереди на единицу, увеличивают длину очереди на единицу или не производят никакого изменения. Время ожидания в очереди узла для положительных требований каждого типа ограничено экспоненциальной случайной величиной. Эта модель может найти свое применение к исследованию реальных сетей связи, поскольку при передаче запроса в реальной сети обычно устанавливается так называемый тайм-аут. Истечение тайм-аута означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего запрос удаляется из очереди. Длина таймаута может быть постоянной, а может быть случайной. В настоящей работе время ожидания есть случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром, раз-

личным для каждого типа положительных требований и обратно пропорциональным количеству требований данного типа, ожидающих обслуживания.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО УЗЛА

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает M независимых пуассоновских потоков положительных требований с параметрами $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_M^+$ и M независимых пуассоновских потоков сигналов с параметрами $\lambda_1^s, \lambda_2^s, \ldots, \lambda_M^s$. λ_k^+ есть интенсивность поступления положительных требований k типа, λ_k^s есть интенсивность поступления сигналов k типа в данную систему. Положительное требование любого типа, поступившее в систему, увеличивает длину очереди в системе на единицу и требует обслуживания. Сигнал типа k, поступивший в систему, уменьшает длину очереди на одно положительное требование типа k с вероятностью $p(k,-)$, если в системе есть положительные требования соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных требований соответствующего типа, увеличивает длину очереди на одно положительное требование типа k с вероятностью $p(k,+)$. Очевидно, что $p(k,-) + p(k,+) = 1$, для всех $k = \overline{1,M}$. В системе находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные требования k-го типа. Времена обслуживания требований в системе независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных требований k-го типа имеют показательное распределение с параметром μ_k $(k = \overline{1,M})$. Требования обслуживаются в порядке поступления. Сигналы не требуют обслуживания. Каждое положительное требование k-го типа, ожидающее обслуживания в очереди системы, имеет время ожидания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_k(n_k) = \dfrac{\nu_k}{n_k - 1}$ для $n_k > 1$, где n_k – число требований k-го типа в системе, ν_k – некоторая постоянная $(k = \overline{1,M})$.

Каждое состояние рассматриваемой системы в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_M(t))$, где $n_k(t)$ – число положительных требований k-го типа в системе в момент t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X = \{n = (n_1, n_2, \ldots, n_M),\ n_i = 0,1,\ldots;\ i = \overline{1,M}\}$. Пусть $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей процесса $n(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей рассматриваемой системы имеют следующий вид:

$$p(n)\sum_{k=1}^{M}\left[\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+) + \nu_k I_{\{n_k>1\}} + \left(\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k\right) I_{\{n_k>0\}}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{M}\left[\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+) p(n-e_k) I_{\{n_k>0\}} + \nu_k p(n+e_k) I_{\{n_k>0\}} + \left(\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k\right) p(n+e_k)\right],\ n \in X. 3$$

десь e_k – единичный вектор размерности M с единицей в k-ой позиции, $I_{\{x\}}$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, и 0 – в противном случае.

Теорема 1. Пусть для любого $k=\overline{1,M}$ выполнено условие

$$\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k} < 1,$$

тогда марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \prod_{k=1}^{M} \left[\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k} \right]^{n_k - 1} \frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k} p_k(0),$$

где $p_k(0) = \dfrac{(\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k)(\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k - \lambda_k^+ - \lambda_k^s p(k,+))}{(\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k)^2 + \lambda_k^s p(k,-)\nu_k + \mu_k \nu_k + \lambda_k^+ \nu_k + \lambda_k^s p(k,+)\nu_k}$.

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N, узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступает простейший поток положительных требований интенсивности λ^+. Каждое положительное требование входного потока независимо от других требований направляется в i-ый узел и становится положительным требованием k-го типа с вероятностью $p^+_{0(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} p^+_{0(i,k)} = 1$. В сеть также поступает простейший поток сигналов интенсивности λ^s. Каждый сигнал входного потока независимо от других направляется в i-ый узел и становится сигналом k-го типа с вероятностью $p^s_{0(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} p^s_{0(i,k)} = 1$. Сигнал типа k, поступивший в i-ый узел, уменьшает длину очереди на одно положительное требование типа k с вероятностью $p_i(k,-)$, если в узле есть положительные требования соответствующего типа, не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных требований соответствующего типа, увеличивает длину очереди на одно положительное требование типа k с вероятностью $p_i(k,+)$. Очевидно, что $p_i(k,-)+p_i(k,+)=1$ для всех $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$. В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные требования k-го типа. Времена обслуживания различных требований независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных требований k-го типа в i-ом узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Требования обслуживаются в порядке поступления. Каждое положительное требование k-го типа, ожидающее обслуживания в очереди в i-ого узла, имеет время ожидания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_{(i,k)}(n_{(i,k)}) = \dfrac{\nu_{(i,k)}}{n_{(i,k)}-1}$ для $n_{(i,k)} > 1$, где $n_{(i,k)}$ – число требований k-го типа в i-ом узле, $\nu_{(i,k)}$ – некоторая постоянная $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Каждое положительное требование k-го типа, время ожидания которого в i-ом узле закончилось, продолжает движение по сети и ведет себя так же, как положительные требования k-го типа, получившие обслуживание в i-ом узле $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Каждое положительное требование l-го типа после завершения обслуживания или окончания времени ожидания в i-ом узле, независимо от других требований мгновенно направляется в j-ый узел и становится положительным требованием m-го типа с вероятностью $p^{+}_{(i,l)(j,m)}$, или становится сигналом m-го типа с вероятностью $p^{s}_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $p_{(i,l)0}$ покидает сеть. Очевидно, что $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}(p^{+}_{(i,l)(j,m)}+p^{s}_{(i,l)(j,m)}+p_{(i,l)0})=1$ $(i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M})$. Будем предполагать, что матрица маршрутизации P неприводима.

Нелинейные уравнения трафика имеют следующий вид:

$$\varepsilon^{+}_{(i,k)}=\lambda^{+}p^{+}_{0(i,k)}+\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,+)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\gamma^{+}_{(j,l)}(p^{+}_{(j,l)(i,k)}+p^{s}_{(j,l)(i,k)}p_i(k,+)),$$

$$\varepsilon^{s}_{(i,k)}=\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,-)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\gamma^{+}_{(j,l)}p^{s}_{(j,l)(i,k)}p_i(k,-)),$$

$$\gamma^{+}_{(i,k)}=\frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}(\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})\mu_{(i,k)}+(\varepsilon^{+}_{(j,l)})^2\nu_{(i,k)}}{(\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)})^2+\varepsilon^{s}_{(i,k)}\nu_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}\nu_{(i,k)}+\varepsilon^{s}_{(i,k)}\nu_{(i,k)}}.$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [1].

Состояние рассматриваемой сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_i(t)=(x_{(i,1)}(t),x_{(i,2)}(t),\ldots,x_{(i,M)}(t))$, описывает состояние i-го узла, то есть $x_{(i,k)}(t)$ – число требований k-го типа в i-ом узле в момент времени t $(i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M})$. Тогда $x(t)$ есть однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_N),\ x_i=(x_{(i,1)},x_{(i,2)},\ldots,x_{(i,M)}),\ x_{(i,k)}=0,1,2,\ldots;\ i=\overline{1,N},\ k=\overline{1,M}\}$.

Пусть $\{p(x),\ x\in X\}$ – стационарное распределение вероятностей процесса $x(t)$.

Уравнения глобального равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(x)\left[\lambda^{+}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}(\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,+)+(\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,-)+\mu_{(i,k)})I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}}+\nu_{(i,k)}I_{\{x_{(i,k)}>1\}})\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\Big[p(x+e_{(i,k)})[\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,-)+(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}})p_{(i,k)0}]\Big]+$$

$$+p(x-e_{(i,k)})(\lambda^{+}p^{+}_{0(i,k)}+\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}p_i(k,+)I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}}))+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}[p(x+e_{(i,k)}-e_{(j,l)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}})(p^{+}_{(i,k)(j,l)}+p^{s}_{(i,k)(j,l)}p_j(l,+))I_{\{x_{(j,l)}\neq 0\}}+$$

$$+p(x+e_{(i,k)}+e_{(j,l)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}})p^{s}_{(i,k)(j,l)}p_j(l,-)+$$

$$+p(x+e_{(i,k)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}I_{\{x_{(i,k)}\neq 0\}})p^{s}_{(i,k)(j,l)}p_j(l,-)I_{\{x_{(j,l)}=0\}}],\qquad x\in X.$$

Здесь $e_{(i,k)}$ – единичный вектор размерности M^2 с единицей в (i,k)-ой позиции.

Теорема 2. Пусть для любого $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$ выполнено условие

$$\frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}}{\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}}<1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(x)=p_1(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_N(x_N),\quad x\in X,$$

где

$$p(x_i)=\prod_{k=1}^{M}\left[\frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}}{\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}}\right]^{x_{(i,k)}-1}\frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}}{\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}}\,p_{(i,k)}(0),$$

$$p_{(i,k)}(0)=\frac{(\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)})(\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}-\varepsilon^{+}_{(i,k)})}{(\varepsilon^{s}_{(i,k)}+\mu_{(i,k)})^2+\varepsilon^{s}_{(i,k)}\nu_{(i,k)}+\mu_{(i,k)}\nu_{(i,k)}+\varepsilon^{s}_{(i,k)}\nu_{(i,k)}},$$

а $(\varepsilon^{+}_{(i,k)},\varepsilon^{s}_{(i,k)},i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$ находятся как решение нелинейных уравнений трафика.

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

Если положить интенсивность потока сигналов λ^{s} и параметр $\nu_{(i,k)}$ ($i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$) равными нулю, получится модель открытой сети, рассматриваемая в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц М.:ИЛ, 1962. 522 с.
2. *Gelenbe, E.* Stability of product-form G-networks/ E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1992. V. 6. P.271-276.