СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫМИ УЗЛАМИ И ИНФОРМАЦИОННЫМИ СИГНАЛАМИ ДВУХ ТИПОВ

Ю. Е. Летунович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: letunovich@gsu.by

Данная работа посвящена исследованию открытой сети массового обслуживания, в которой узлы имеют бесконечное число каналов обслуживания. В каждом из узлов рассматриваемой сети находится единственный прибор, который может работать в нескольких режимах. В сети циркулируют положительные и отрицательные заявки нескольких типов, а также информационные сигналы двух типов: сигналы повышения и понижения режима. Для данной модели проведён анализ изолированного узла, исследован вопрос о виде стационарного распределения.

Ключевые слова: открытая сеть, типы заявок, сигналы, многорежимные стратегии обслуживания, обратимость, стационарное распределение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В сеть, состоящую из N бесконечнолинейных узлов, поступают $2M+2$ независимых между собой пуассоновских стационарных потока: M потоков обычных или положительных заявок с параметрами $\lambda_u^+, u=\overline{1,M}$, M потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_u^-, u=\overline{1,M}$, поток сигналов уменьшения режима с параметром ω^- и поток сигналов увеличения режима с параметром ω^+.

Отрицательные заявки в отличие от обычных (положительных) заявок не требуют обслуживания, а поступление отрицательной заявки в узел уменьшает число заявок в нём на единицу, если число заявок в узле больше нуля, и не производит никаких изменений, если в узле нет заявок. После уничтожения положительной заявки отрицательная заявка исчезает и в дальнейшем не оказывает влияния на сеть. Отрицательная заявка типа $u=\overline{1,M}$, поступающая в узел, вычеркивает положительную заявку такого же типа, находящуюся на приборе, номер которого минимальный.

В каждом из N узлов находится единственный прибор, который может работать в $r_i+1, i=\overline{1,N}$, режимах. Назовём 0 основным режимом работы. Время пребывания в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_i(\overline{x}_i,0)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний x_i, у которых $1 \le l \le r_i - 1$, время пребывания в режиме l также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_i(x_i)$ прибор i-го узла переходит в $l-1$ режим, а с интенсивностью $\nu_i(x_i)$ – в $l+1$ режим. Время пребывания в последнем r_i-ом режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_i(\bar{x}_i, r_i)$, после чего прибор переходит в (r_i-1)-ый режим. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется. Сигнал уменьшения режима при поступлении в i-ый узел с режимом l_i переводит его в режим l_i-1, не изменяя числа заявок в узле, и не производит никаких действий, если узел находится в режиме 0. Сигнал увеличения режима при поступлении в i-ый узел с режимом l_i переводит его в режим l_i+1, не изменяя числа заявок в узле, и не производит никаких действий, если узел находится в режиме работы r_i. Изменив режим работы, описанные сигналы пропадают, не оказывая влияния на сеть.

Каждая заявка типа u, $u=\overline{1,M}$, потока положительных заявок независимо от других заявок с вероятностью $p^+_{0(i,u)}$ направляется в i-ый узел. Каждая заявка типа u, $u=\overline{1,M}$, потока отрицательных заявок независимо от других заявок с вероятностью $p^-_{0(i,u)}$ направляется в i-ый узел ($\sum_{i=1}^{N} p^+_{0(i,u)}=1, \sum_{i=1}^{N} p^-_{0(i,u)}=1$). Поступающие сигнал уменьшения и сигнал увеличения режима направляются в i-ый узел соответственно с вероятностями q^-_{0i} и q^+_{0i} ($\sum_{i=1}^{N} q^+_{0i}=1, \sum_{i=1}^{N} q^-_{0i}=1$). Положительная заявка типа u, $u=\overline{1,M}$, после обслуживания в i-ом узле с вероятностью $p^+_{(i,u)(j,v)}$ как положительная типа v, $v=\overline{1,M}$, с вероятностью $p^-_{(i,u)(j,v)}$ как отрицательная типа v, $v=\overline{1,M}$, с вероятностью $q^+_{(i,u)j}$ как сигнал повышения режима и с вероятностью $q^-_{(i,u)j}$ как сигнал понижения режима мгновенно направляется в j-ый узел, $i,j=\overline{1,N}$, или покидает сеть с вероятностью $p_{(i,u)0}$ ($\sum_{j=1}^{N}(p^+_{(i,u)(j,v)}+p^-_{(i,u)(j,v)}+q^+_{(i,u)j}+\ \ +q^-_{(i,u)j})+p_{(i,u)0}=1$).

Узлы имеют бесконечное число каналов обслуживания. Нумеруются только занятые приборы. Нумерация переменная следующего вида. Если требование поступает в свободный узел, то занимаемому им прибору присваивается номер 1. Если во время обслуживания этой заявки поступает следующее требование, то оно занимает свободный прибор и ему с вероятностью ½ присваивается номер 1 (тогда прибор с номером 1 будет иметь номер 2), или с той же вероятностью – номер 2. Если очередное поступающее требование застаёт занятыми k приборов, то оно занимает свободный прибор, который с вероятностью $\frac{1}{k+1}$ получает номер s ($s=\overline{1,k+1}$). При этом для приборов с номерами $1,2,\ldots,s-1$ их номера сохраняются, а для приборов с номерами $s,\ldots,k$ величина номера увеличивается на 1. Если заканчивается обслуживание на приборе с номером s, то приборы с номерами $1,2,\ldots,s-1$ сохраняют свои номера, а номера последующих приборов $s+1,s+2,\ldots$ уменьшаются на 1.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_N(t))$, где $x_i(t)=(\bar{x}_i(t),l_i(t))=(x_{i1}(t),x_{i2}(t),\ldots,x_{i,n(t)}(t),\ \ l_i(t))$ описывает состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $x_{i1}(t)$ – тип заявки, которая обслуживается в момент времени t первым прибором,..., $x_{i,n(i)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании прибором с номером $n(i)$ в момент времени t, $n(i)$ – число заявок в i-ом узле, $l_i(t)$ – режим, в котором работает i-ый узел в момент времени t. Процесс $x(t)$ является однородным марковским с пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, где $X_i = \{(0,l_i),(x_{i1},l_i),(x_{i1},x_{i2},l_i),(x_{i1},x_{i2},x_{i3},l_i),...: x_{ik} = \overline{1,M}, k = 1,2,...; l_i = \overline{0,r_i}\}$.

Длительность обслуживания прибором i-го узла, находящегося в состоянии x_i, имеет показательное распределение с параметром $\mu_{i,u}$.

Будем предполагать, что матрица $(p_{(i,u)(j,v)} : i,j = \overline{0,N}; u,v = \overline{1,M})$, где $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима, тогда уравнения трафика

$$\alpha^+_{i,u} = \lambda^+ p^+_{0(i,u)} + \sum_{(k,v)} \alpha^+_{k,v} f_{k,v} p^+_{(k,v)(i,u)};$$

$$\alpha^-_{i,u} = \lambda^- p^-_{0(i,u)} + \sum_{(k,v)} \alpha^+_{k,v} f_{k,v} p^-_{(k,v)(i,u)}; \tag{1}$$

$$\beta^+_i = \omega^+ q^+_{0i} + \sum_{(k,v)} \alpha^+_{k,v} f_{k,v} q^+_{(k,v)i};$$

$$\beta^-_i = \omega^- q^-_{0i} + \sum_{(k,v)} \alpha^+_{k,v} f_{k,v} q^-_{(k,v)i},$$

где $f_{k,v} = \dfrac{\mu_{k,v}}{\mu_{k,v} + \alpha^-_{k,v}}$, $\alpha^+_{i,u}, \alpha^-_{i,u}, \beta^+_i, \beta^-_i$ – средние интенсивности поступления в i-ый узел положительных заявок типа u, отрицательных заявок типа u, $u = \overline{1,M}$, сигналов повышения и понижения режимов соответственно, имеют решение.

АНАЛИЗ ИЗОЛИРОВАННОГО УЗЛА

Введём следующие операторы: $T^+_{u,k}, T^-_k, R^{l+1}, R^{l-1} : X_i \to X_i$, положив

$$T^+_{u,k}(0,l_i) = (u,l_i),$$

при $x_i \neq 0$ $T^+_{u,k}(x_i) = T^+_{u,k}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i) = (x_{i1},...,x_{i,k-1},u,x_{i,k},...,x_{i,n(i)},l_i)$, $k = \overline{1,n(i)+1}$;

$$T^-_k(x_{i1},l_i) = (0,l_i),$$

при $|x_i| = n(i) > 1$ $T^-_k(x_i) = T^-_k(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i) = (x_{i1},...,x_{i,k-1},x_{i,k+1},...,x_{i,n(i)},l_i), k = \overline{1,n(i)}$;

$$R^{l+1}(x_i) = R^{l+1}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i) = (x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i+1),$$

$$R^{l-1}(x_i) = R^{l-1}(x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i) = (x_{i1},...,x_{i,n(i)},l_i-1),$$

$T^-_k(x_i)$ не определён при $x_i = (0,l)$, $R^{l+1}(x_i)$ не определён при $x_i = (\overline{x}_i, r_i)$, $R^{l-1}(x_i)$ – при $x_i = (\overline{x}_i, 0)$. Рассмотрим также операторы, описывающие изменение состояния сети: $T^+_{(i,u),k}, T^-_{i,k}, R^{l+1}_i, R^{l-1}_i : X \to X$, положив

$T^+_{(i,u),k}(x) = T^+_{(i,u),k}(x_1,x_2,...,x_N) = \widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_N)$, где $\widetilde{x}_i = T^+_{u,k}(x_i)$, $\widetilde{x}_k = x_k$ при $k \neq i$,

$T^-_{i,k}(x) = T^-_{i,k}(x_1,x_2,...,x_N) = \widetilde{x} = (\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_N)$, где $\widetilde{x}_i = T^-_k(x_i)$, $\widetilde{x}_k = x_k$ при $k \neq i$,

$$R_i^{l+1}(x) = R_i^{l+1}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_N), \text{ где } \widetilde{x}_i = R^{l+1}(x_i), \ \widetilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq i,$$

$$R_i^{l-1}(x) = R_i^{l-1}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_N), \text{ где } \widetilde{x}_i = R^{l-1}(x_i), \ \widetilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq i.$$

Кроме этого, введём оператор $S_i : X \to X_i$, положив

$$S_i(x) = S_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_i = (\bar{x}_i, l_i).$$

Лемма. Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\left(\nu_i\left(T^+_{u,k}(x_i)\right) + \beta_i^+\right)\cdot\left(\varphi_i\left(\bar{x}_i, l_i + 1\right) + \beta_i^-\right) =$$
$$= \left(\nu_i\left(\bar{x}_i, l_i\right) + \beta_i^+\right)\cdot\left(\varphi_i\left(T^+_{u,k}\left(\bar{x}_i, l_i + 1\right)\right) + \beta_i^-\right). \qquad (2)$$

Для изолированного узла уравнения обратимости будут иметь вид:

$$\frac{1}{n(i)}\alpha^+_{i,x_{ik}} p_i(T_k^-(x_i)) = (\mu_{i,x_{ik}} + \alpha^-_{i,x_{ik}} I_{\{c=k\}}) p_i(x_i);$$

$$\left(\varphi_i\left(\bar{x}_i, l_i\right) + \beta_i^-\right) p_i\left(\bar{x}_i, l_i\right) = \left(\nu_i\left(\bar{x}_i, l_i - 1\right) + \beta_i^+\right) p_i\left(\bar{x}_i, l_i - 1\right), \quad 1 \le l_i \le r_i.$$

Здесь $c = \min\left\{m : x_{im} = x_{ik}, m = \overline{1, n(i)}\right\}$.

Для эргодичности марковского процесса $x(t)$, описывающего поведение сети, достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{x\in X} q_x \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{n(i)!}\prod_{s=1}^{n(i)}\frac{\alpha^+_{i,x_{is}}}{\mu_{i,x_{is}} + \alpha^-_{i,x_{is}} I_{\{c=s\}}}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(o,k-1)+\beta_i^+}{\varphi_i(o,k)+\beta_i^-}\right]. \qquad (3)$$

где q_x – интенсивность выхода из состояния x.

Теорема. Пусть в узлах сети выполнено условие (2) и условие эргодичности (3), тогда стационарное распределение вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания с бесконечнолинейными узлами, несколькими типами положительных и отрицательных заявок, информационными сигналами двух типов и многорежимными стратегиями обслуживания имеет вид $p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_N(x_N)$, где $p_i(x_i)$ определяется по формуле:

$$p_i\left(\bar{x}_i, l_i\right) = \frac{1}{n(i)!}\prod_{s=1}^{n(i)}\frac{\alpha^+_{i,x_{is}}}{\mu_{i,x_{is}} + \alpha^-_{i,x_{is}} I_{\{c=s\}}}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(o,k-1)+\beta_i^+}{\varphi_i(o,k)+\beta_i^-} p_i(0,0), \quad \left(\bar{x}_i, l_i\right)\in X_i,$$

где $p_i(0,0) = \left[\sum_{x_i\in X_i}\frac{1}{n(i)!}\prod_{s=1}^{n(i)}\frac{\alpha^+_{i,x_{is}}}{\mu_{i,x_{is}} + \alpha^-_{i,x_{is}} I_{\{c=s\}}}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(o,k-1)+\beta_i^+}{\varphi_i(o,k)+\beta_i^-}\right]^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крыленко, А.В.* Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками II. Модели с несколькими типами заявок / А.В. Крыленко, Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. 1998. №2. С. 106-110.

2. *Малинковский, Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі. 2001. №3. С. 129-134.

3. *Gelenbe, E.* Stability of product form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probability in the Engineering and Informational Sciences.1992. №6. P. 271-276.