ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЧИСЕЛ СОЛНЕЧНЫХ ПЯТЕН ВОЛЬФА

И. И. Комаров

Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: komarov@brsu.brest.by

Рассмотрим данные z_t, $t=\overline{1,N}$, характеризующие числа солнечных пятен Вольфа в период с 1770 г. по 1864 г. (см. [1]). Для выбора линейной стационарной модели, описывающие этот временной ряд, оценим автокорреляционные ρ_k и частные автокорреляционные $\rho(k)$ функции.

Для оценки автокорреляционной функции воспользуемся формулой

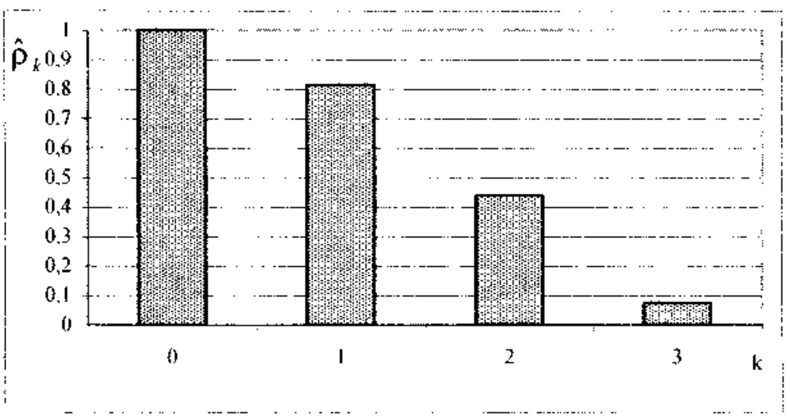
$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)},$$

где

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}),$$

$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t$ - среднее значение временного ряда, $k=\overline{0,N-1}$, N – число наблюдений.

Рассмотрим случай, когда N=95. Тогда автокорреляционная функция для $k=\overline{0,3}$ будет иметь вид



Введём следующие обозначения

$$A_K = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \hat{\rho}_{k-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\overline{A}_k = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{k-2} & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{k-3} & \hat{\rho}_2 \\ \hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{k-4} & \hat{\rho}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\rho}_{k-2} & \hat{\rho}_{k-3} & \hat{\rho}_{k-4} & \dots & 1 & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \hat{\rho}_{k-3} & \dots & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_k \end{vmatrix},$$

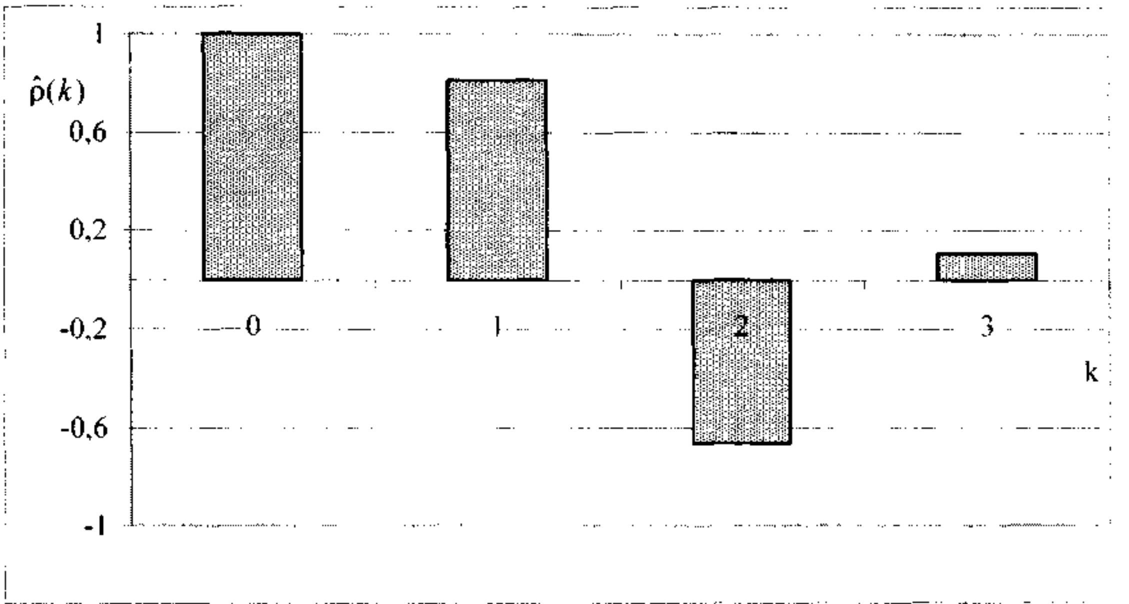
$k=\overline{0,N-1}$.

Тогда оценка частной автокорреляционной функции

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\overline{A}_k}{A_k}$$

$k=\overline{0,N-1}$.

Когда N=95, частная автокорреляционная функция для $k=\overline{0,3}$ будет иметь вид



Следуя работе [2] (стр. 246), по виду автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции можно предположить, рассматриваемый временной ряд можно описать линейными моделями авторегрессии второго порядка AR(2), либо третьего порядка AR(3):

$$z_t = \alpha_1 z_{t-1} + \alpha_2 z_{t-2} + a_t, \tag{1}$$

$$z_t = \beta_1 z_{t-1} + \beta_2 z_{t-2} + \beta_3 z_{t-3} + a_t, \tag{2}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, β_3 – параметры моделей, $a_t \sim N(0,\sigma^2)$, $t=1,2,\dots$.

Известно (см. [1]), что для стационарности линейного процесса необходимо, чтобы ряд

$$\psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j B^j \text{ с } \beta_0 = 1$$

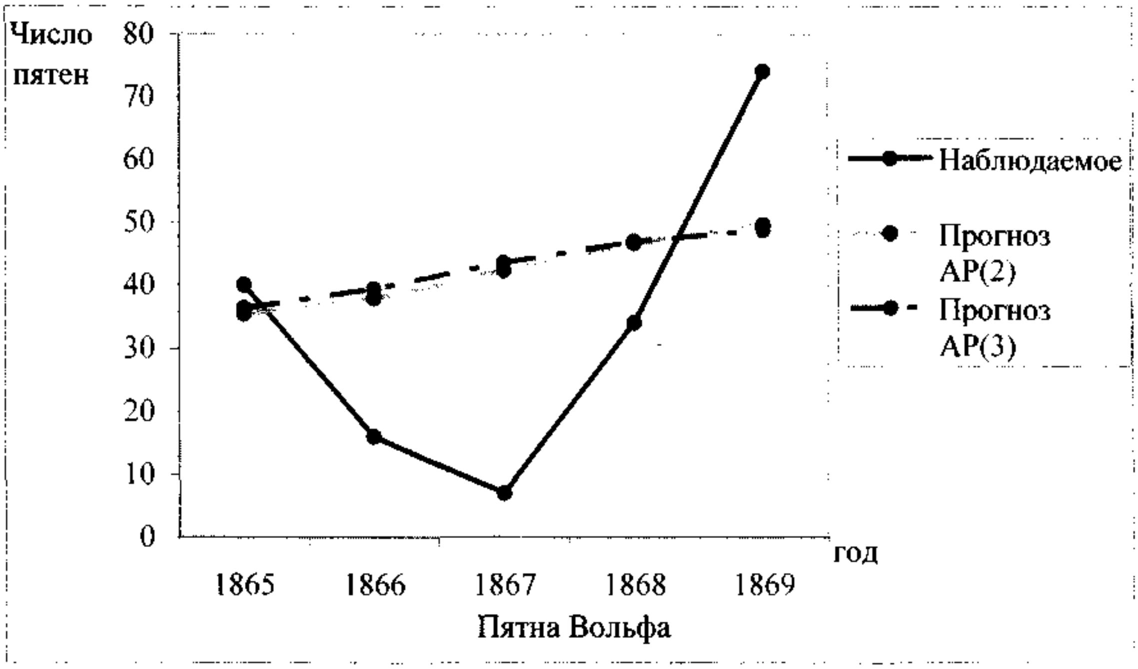
сходился при $|B| \le 1$, где B оператор сдвига назад.

Используя уравнения Юла-Уокера, находим оценки параметров α_1, α_2, β_1, β_2, β_3. Имеем

AR(2)	AR(3)
$\hat{\alpha}_1 = 1{,}35$ $\hat{\alpha}_2 = -0{,}66$	$\hat{\beta}_1 = 1{,}424$ $\hat{\beta}_2 = -0{,}806$ $\hat{\beta}_3 = 0{,}107$

что полностью удовлетворяет условию стационарности.

Используя полученные оценки параметров α_1, α_2 для модели AR(2), а также β_1, β_2 и β_3 для модели AR(3), спрогнозируем результаты на последующие пять лет и сравним их с реальными данными. Получим следующий результат



Таким образом, видно, что прогнозируемые данные расходятся с реальными данными и следует искать другие методы для оценки параметров модели.

Предположим, что рассматриваемый временной ряд имеет устойчивое распределение, и оценим параметр устойчивости α. Центрируем данные, переходя к величинам

$$\bar{z}_t = z_t - \bar{z},$$

где $t = \overline{1, N}$.

Следуя работе [3] построим два набора независимых случайных величин.

$$U_1 = \operatorname{sign} \bar{z}_1,\ U_2 = \operatorname{sign} \bar{z}_2,\ \ldots,\ U_n = \operatorname{sign} \bar{z}_n$$

и

$$V_1 = \log|\bar{z}_1|,\ V_2 = \log|\bar{z}_2|,\ \ldots,\ V_n = \log|\bar{z}_n|$$

В качестве оценки параметра α рассчитаем статистику

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\nu}}},$$

где

$$\tilde{\nu} = \max(\hat{\nu}, \frac{(1+|\hat{\theta}|)^2}{4})$$

$\hat{\theta}$ оценка параметра θ, который определяется как **E**U, а

$$\hat{\nu} = \frac{6}{\pi^2} S_v^2 - \frac{3}{2} S_U^2 + 1,$$

где S_v^2 и S_u^2 несмещённые оценки дисперсии независимых случайных величин V и U соответственно.

Получим следующий результат

$$\hat{\alpha} = 1{,}69$$

Таким образом рассматриваемый временной ряд представляет собой α-устойчивый стационарный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бокс, Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж.Бокс, Г.Дженкинс. Москва. изд-во Мир. 1974. 408 с.

2. *Носко, В. П.* Эконометрика / В.П. Носко. Москва, Институт экономики переходного периода. 2 М.: ИЭПП, 2004. 501 с.

3. *Золотарев, В. М.* Одномерные устойчивые распределения / В.М. Золотарев. Москва «Наука» 1983. 304 с.