ФАКТОРИАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ КВАЗИТЕПЛИЦЕВОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. Клименок, А. Н. Дудин

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: klimenok@bsu.by, dudin@bsu.by

В работе предлагается метод вычисления факториальных моментов стационарного распределения многомерной квазитеплицевой цепи Маркова, основанный на использовании функционального уравнения для векторной производящей функции этого распределения.

Ключевые слова: квазитеплицева цепь Маркова, стационарное распределение, факториальные моменты.

В работе [1] авторов данной статьи исследованы многомерные цепи Маркова, имеющие одну счетную и несколько конечных компонент и специальную структуру матрицы одношаговых вероятностей переходов. В [1] получены условия эргодичности и разработаны алгоритмы нахождения стационарного распределения таких цепей. Вычислив стационарное распределение, мы, в принципе, можем считать решенной и задачу вычисления моментов этого распределения. Но в случае, когда нас интересует только моменты распределения, а не само распределение, предпочтительно использовать менее затратные и более точные методы непосредственного вычисления моментов. В данной статье мы предполагаем такой метод вычисления векторных факториальных моментов стационарного распределения многомерной квазитеплицевой цепи Маркова.

Вначале приведем некоторые определения и результаты [1], необходимые для решения поставленной задачи.

В рамках данной работы без ограничения общности будем рассматривать двумерную цепь Маркова $\xi_k = (i_k, \nu_k)$, $k \ge 1$, с фазовым пространством $(0,1,2,\cdots)\times(0,1,\cdots,W)$, где W - некоторое натуральное число.

Перенумеруем состояния цепи в лексикографическом порядке и сформируем $(W+1)\times(W+1)$ матрицы

$$P_{i,l} = \left(P\{(i,\nu) \to (l,\nu')\}\right)_{\nu,\nu'=\overline{0,W}},\ i,l \ge 0,$$

одношаговых вероятностей переходов цепи из состояний, соответствующих значению i счетной компоненты, в состояния, соответствующие значению l этой компоненты.

Цепь Маркова ξ_k, $k \ge 1$, называется квазитеплицевой, если это неприводимая непериодическая цепь, у которой матрицы $P_{i,l}$ вероятностей переходов удовлетворяют следующим условиям:

1°. $P_{i,l} = 0, l < i-1, i > 1$.

2°. При $i > 0$ матрицы $P_{i,l}$ зависят от значений i,l счетной компоненты только через их разность $l-i$.

Обозначим

$$Y_n = P_{i,i+n-1},\ n \ge 0,\ i > 0;$$
$$V_n = P_{0,n},\ n \ge 0.$$

Пусть также

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n z^n,\ V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n,\ |z| \le 1.$$

Введем обозначения для стационарного распределения цепи Маркова $\xi_k,\ k \ge 1$,

$$\pi(i, \nu) = \lim_{k \to \infty} P\{i_k = i, \nu_k = \nu\},\ \nu = \overline{0, W},\ i \ge 0,$$

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\pi(i,0), \pi(i,1), \cdots, \pi(i,W)),\ i \ge 0.$$

Обозначим также

$$\boldsymbol{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_i z^i,\ |z| \le 1.$$

Согласно [1], векторная производящая функция $\boldsymbol{\Pi}(z)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\boldsymbol{\Pi}(z)(Y(z) - zI) = \boldsymbol{\pi}_0 (Y(z) - zV(z)), \tag{1}$$

притом решение этого уравнения определяет единственное стационарное распределение рассматриваемой цепи, если эта цепь эргодична.

В общем случае матрица $Y(z)$ может быть разложимой. Будем рассматривать этот случай и считать без ограничения общности, что $Y(z)$ уже является нормальной формой (см., например, [2]) разложимой матрицы, т.е. имеет следующий вид:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y_1(z) & O & \cdots & O & O & \cdots & O \\ O & Y_2(z) & \cdots & O & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & Y_m(z) & O & \cdots & O \\ Y_{m+1,1}(z) & Y_{m+1,2}(z) & \cdots & Y_{m+1,m}(z) & Y_{m+1}(z) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{s,1}(z) & Y_{s,2}(z) & \cdots & Y_{s,m}(z) & Y_{s,m+1}(z) & \cdots & Y_s(z) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $Y_l(z)$ - неразложимая квадратная матрица порядка $r_l,\ l = \overline{1,s}$, и в каждой блочной строке $(Y_{l,1}(z) \cdots Y_{l,l-1}(z)),\ l = \overline{m+1,s}$, есть по крайней мере одна ненулевая матрица.

Тогда, согласно [1], необходимым и достаточным условием эргодичности рассматриваемой цепи Маркова $\xi_k,\ k \ge 1$, является выполнение неравенств

$$[\det(zI - Y_l(z))]'_{z=1} > 0,\ l = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Приступая к нахождению искомых факториальных моментов, введем некоторые обозначения, которые позволят избежать излишней громоздкости выражений при выводе соответствующих формул.

- $\boldsymbol{b}(z) = \boldsymbol{\pi}_0 (Y(z) - zV(z))$;

- $S(z) = Y(z) - zI = \begin{pmatrix} A(z) & O \\ B(z) & D(z) \end{pmatrix};$
- $A(z) = diag\{A_l(z), l = \overline{1,m}\};$
- $A_l(z) = Y_l(z) - zI, l = \overline{1,m};$
- $B(z) = \begin{pmatrix} Y_{m+1,1}(z) & Y_{m+1,2}(z) & \cdots & Y_{m+1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{s,1}(z) & Y_{s,2}(z) & \cdots & Y_{s,m}(z) \end{pmatrix};$
- $D(z) = diag\{Y_l(z) - zI, l = \overline{m+1,s}\};$
- $\Pi^{(n)}(z) = \dfrac{d^n\Pi(z)}{dz^n}, n \geq 1; \Pi^{(0)}(z) = \Pi(z);$
- $\Pi^{(n)} = \Pi^{(n)}(1), n \geq 0.$

Замечание. Обозначения, аналогичные введенным в двух последних пунктах, будем использовать для производных n-го порядка любых функций от z, встречающихся ниже.

Нам нужно вычислить векторные факториальные моменты $\Pi^{(n)}, n \geq 0$, стационарного распределения цепи $\xi_k, k \geq 1$.

Разобьем вектор $\Pi(z)$, представляющий векторную производящую функцию стационарного распределения, на две части следующим образом:

$$\Pi(z) = (\Pi_1(z), \Pi_2(z)), \tag{4}$$

где вектор $\Pi_1(z)$ имеет размерность $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$.

Соответственно, векторные факториальные моменты $\Pi^{(n)}$ также представим в виде

$$\Pi^{(n)} = (\Pi_1^{(n)}, \Pi_2^{(n)}), n \geq 0.$$

Аналогичным образом разобьем на две части и вектор $\boldsymbol{b}(z)$:

$$\boldsymbol{b}(z) = (\boldsymbol{b}_1(z), \boldsymbol{b}_2(z)). \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть цепь Маркова $\xi_k, k \geq 1$, эргодична, т.е. выполняются неравенства (3). Пусть также уравнение (1) допускает $(L+1)$ - кратное дифференцирование. Тогда векторные факториальные моменты $\Pi_2^{(n)}, n = \overline{1,L}$, вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\Pi_2^{(n)} = [\boldsymbol{b}_2^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \Pi_2^{(k)} D^{(n-k)}](D^{(0)})^{-1}, n = \overline{1,L}, \tag{6}$$

а векторные факториальные моменты $\Pi_1^{(n)}, n = \overline{1,L}$, - по следующим рекуррентным формулам:

$$\Pi_1^{(n)} = \{[\boldsymbol{f}^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \Pi_1^{(k)} A^{(n-k)}]\widetilde{I} + [\boldsymbol{f}^{(n+1)} - \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k \Pi_1^{(k)} A^{(n+1-k)}]\hat{I}\}\widetilde{A}^{-1}, n = \overline{1,L}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{f}^{(l)} = \boldsymbol{b}_1^{(l)} - \sum_{k=0}^{l} C_l^k \Pi_2^{(k)} B^{(l-k)}$,

$$\widetilde{A} = A(1)\widetilde{I} + A'(1)\hat{I}, \tag{8}$$

$$\widetilde{I} = diag\{\widetilde{I}_{r_l}, l = \overline{1,m}\},\ \hat{I} = diag\{\hat{I}_{r_l}, l = \overline{1,m}\},$$

$\widetilde{I}_{r_l}, \hat{I}_{r_l}$ - квадратные матрицы порядка r_l, имеющие вид

$$\widetilde{I}_{r_l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{I}_{r_l} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Используя введенные выше обозначения, перепишем функциональное уравнение (1) в виде

$$\mathbf{\Pi}(z)S(z) = \mathbf{b}(z). \tag{9}$$

Разбив векторы $\mathbf{\Pi}(z)$ и $\mathbf{b}(z)$ на части в соответствии с (4), (5), легко увидеть, что система уравнений (9) разбивается на две системы:

$$\mathbf{\Pi}_2(z)D(z) = \mathbf{b}_2(z), \tag{10}$$

и

$$\mathbf{\Pi}_1(z)A(z) = \mathbf{b}_1(z) - \mathbf{\Pi}_2(z)B(z). \tag{11}$$

Заметим, что матрица $D(1) = D^{(0)}$ невырожденная, т.к. это блочная диагональная матрица, диагональные блоками которой являются матрицы $Y_l(1) - I,\ l = \overline{m+1,s}$, а каждая из матриц $Y_l(1), l = \overline{m+1,s}$, является неприводимой субстохастической в силу её определения в (2).

Последовательно дифференцируя (10) в точке $z = 1$ и учитывая невырожденность матрицы $D^{(0)}$, получим рекуррентную формулу (6).

Считаем далее факториальные моменты $\mathbf{\Pi}_2^{(n)}, n = \overline{1,L}$, вычисленными. Обозначим правую часть (11) через $\mathbf{f}(z)$, т.е.

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{b}_1(z) - \mathbf{\Pi}_2(z)B(z),$$

и перепишем (11) в виде

$$\mathbf{\Pi}_1(z)A(z) = \mathbf{f}(z). \tag{12}$$

Последнее уравнение будем использовать для нахождения векторных факториальных моментов $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$. Однако попытка найти из этого уравнения моменты $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$ аналогично тому, как мы нашли моменты $\mathbf{\Pi}_2^{(n)}$ из уравнения (10), наталкивается на трудности, связанные с вырожденностью матрицы $A(1)$.

Действительно, последовательно дифференцируя (12) в точке $z = 1$, получим рекуррентные уравнения для векторов $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$:

$$\mathbf{\Pi}_1^{(n)}A(1) = \mathbf{f}_1^{(n)} - \sum_{l=0}^{n-1} C_n^l \mathbf{\Pi}_1^{(l)} A^{(n-l)},\ n = \overline{0,L}, \tag{13}$$

которые не позволяют определить искомые векторы в силу вырожденности матрицы $A(1)$.

Зафиксируем в (13) величину n и модифицируем систему линейных уравнений (13) для компонент вектора $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$, заменив некоторые из уравнений таким образом, чтобы получить систему с невырожденной матрицей. Для этого запишем (13) для $n+1$ и умножим полученные уравнение последовательно на векторы

$$\begin{pmatrix} e_{r_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{r_1} \\ e_{r_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ e_{r_m} \end{pmatrix},$$

где 0_a, e_a - вектор-столбцы размерности a, состоящие из нулей и единиц соответственно.

В итоге получим m новых уравнений для компонент вектора $\Pi_1^{(n)}$.

Заменим этими уравнениями r_1-е, $(r_1 + r_2)$-е, $\dots, (r_1 + \dots + r_m)$-е уравнения системы (13). В результате получим новую систему линейных алгебраических уравнений для компонент вектора $\Pi_1^{(n)}$:

$$\Pi_1^{(n)}\widetilde{A} = [f^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \Pi_1^{(k)} A^{(n-k)}]\widetilde{I} + [f^{(n+1)} - \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k \Pi_1^{(k)} A^{(n+1-k)}]\hat{I}. \quad (14)$$

Рассмотрим матрицу $\widetilde{A}$ полученной системы. Учитывая (8) и введенные ранее обозначения, запишем $\widetilde{A}$ в виде

$$\widetilde{A} = diag\{(Y_l(1) - I)\widetilde{I}_{r_l} + Y_l'(1)\hat{I}_{r_l}, l = \overline{1,m}\}. \quad (15)$$

Используя результаты [1], нетрудно показать, что

$$\det[(Y_l(1) - I)\widetilde{I}_{r_l} + Y_l'(1)\hat{I}_{r_l}] = (-1)^{r_l}[\det(zI - Y_l(z))]'_{z=1}, l = \overline{1,m}. \quad (16)$$

По условию эргодичности (3) правая часть (17) не равна нулю. Тогда из (15), (16) следует, что матрица $\widetilde{A}$ невырожденная. Это позволяет переписать соотношение (14) в виде (7) и завершить доказательство теоремы.

Следствие 1. В случае, когда $m = s$ в представлении (2) матрицы $Y(z)$, векторные факториальные моменты $\Pi^{(n)}$, $n = \overline{1,L}$, в условиях теоремы 1, вычисляются по рекуррентным формулам

$$\Pi^{(n)} = \{[b^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \Pi_1^{(k)} A^{(n-k)}]\widetilde{I} + [b^{(n+1)} - \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k \Pi_1^{(k)} A^{(n+1-k)}]\hat{I}\}\widetilde{A}^{-1}, n = \overline{1,L}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudin, A.N.* Multi-dimensional quasitoeplitz Markov chains / A.N. Dudin, V.I. Klimenok // J. Appl. Math. and Stoch. Analysis. 1999. V.12, № 3. P. 255-273.

2. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М.: Наука, 1967.