ОБСЛУЖИВАНИЕ КОНФЛИКТНЫХ ПОТОКОВ ПО АЛГОРИТМУ С ПРОДЛЕНИЕМ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

А. В. Зорин

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия
Email: zoav1@uic.nnov.ru

Изучается система обслуживания конфликтных потоков неоднородных требований в системе типа перекрестка. Входные потоки формируются в случайной среде с конечным числом состояний. Для получения условий существования стационарного режима функционирования применяется итеративно-мажорантный подход.

Ключевые слова: случайная среда, обслуживание конфликтных потоков, стационарный режим, итеративно-мажорантный метод.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании процессов управления формируемыми в случайной среде конфликтными потоками в различных системах обслуживания часто приходим к некоторой случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i = 0, 1, \ldots\}$, описывающей в некоторой дискретной временной шкале $\{\tau_i; i = 0, 1, \ldots\}$ изменение состояния обслуживающего устройства, колебания длин очередей и изменение состояния случайной среды. Для получения условий существования стационарного режима используется итеративно-мажорантный метод. В настоящей работе мы покажем, как следует учесть период усреднения влияния случайной среды при использовании этого метода. В качестве примера будет рассмотрена система обслуживании конфликтных транспортных потоков автоматом-светофором по алгоритму с продлениями. Заметим, что сходный алгоритм может применять и в некоторых технологических производственных процессах.

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ КОНФЛИКТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ПО АЛГОРИТМУ С ПРОДЛЕНИЯМИ КАК УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Пусть на перекресток поступают два конфликтных транспортных потока Π_1, Π_2. Изменение во времени вероятностной структуры входных потоков определяется внешней случайной средой. Моделью случайной среды будет служить неразложимая марковская цепь с состояниями $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, …, $e^{(d)}$, $d < \infty$. Вероятность смены состояния среды с $e^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, d$, на состояние $e^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, d$, равна $a_{l,k}$. Смена состояния среды может происходить только в моменты времени, совпадающие с моментами смены состояния обслуживающего устройства. Если среда находится в состоянии $e^{(k)}$, то требования по потоку Π_j, $j=1$, 2, поступают группами так, что поток групп есть пуассоновский с параметром $\lambda_j^{(k)}$, размеры групп суть независимые случайные величины и произвольная группа содержит c требований, $c \geq 1$, с вероятностью $p_c^{(j,k)}$. Такое предположение о структуре согласуется с наблюдениями: при хорошей погоде потоки машин на магистрали, как правило, являются пуассоновскими, а при плохой погоде превращаются в потоки пачек Бартлетта [1]. Требования потока Π_j поступают в накопитель O_j неограниченного объема. Обслуживающее устройство имеет 2 состояния: $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$. В состоянии $\Gamma^{(j)}$ обслуживается максимально возможное число требований из очереди O_j, а требования другой очереди не обслуживаются. Время пребывания светофора-автомата в состоянии $\Gamma^{(j)}$ неслучайно и равно T_j. Требования первого потока имеют приоритет над требованиями второго потока в следующем смысле. Если по окончании времени, отведенного для обслуживания требований из очереди O_2, очередь O_1 пуста, то снова включается режим обслуживания требований из очереди O_2, в противном случае включается режим обслуживания требований из очереди O_1. После окончания времени, отведенного для обслуживания очереди O_1 всегда начинается обслуживание очереди O_2. Таким образом, обслуживающее устройство выполняет не только традиционные функции по обслуживанию неоднородных требований, но и функции по управлению входными потоками для разрешения их конфликтности, по формированию очередей в накопителях, а также функцию изменения режимов своей работы. Процесс обслуживания удобно характеризовать не длительностями обслуживания произвольного требования, как принято в теории массового обслуживания, а потоками насыщения Π'_1, Π'_2 — выходными потоками системы обслуживания при максимально возможной загруженности ее накопителей и эксплуатации. Если обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(j)}$, то поток насыщения Π'_j содержит ℓ_j требований.

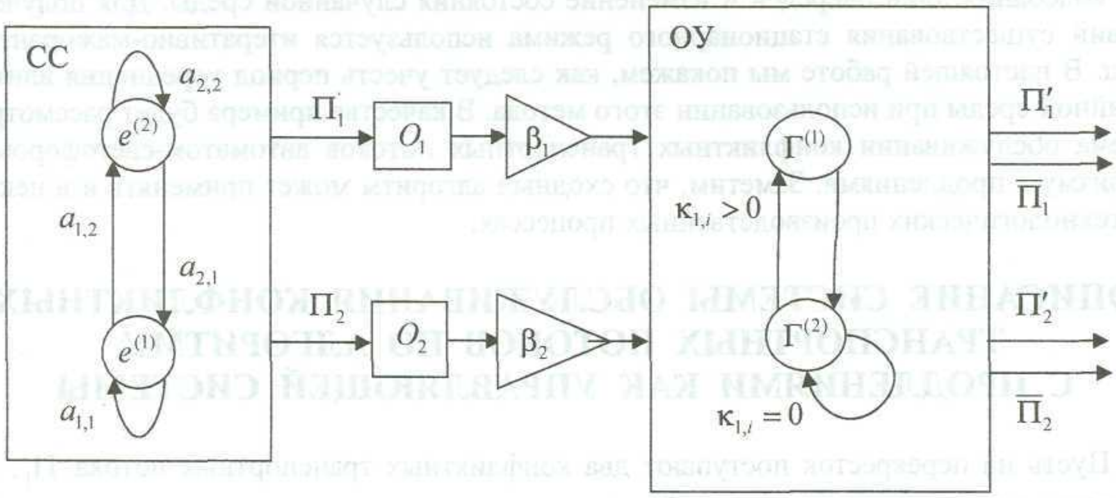

Рис. 1. Схема управляющей системы обслуживания

Описанная система обслуживания обладает всеми чертами кибернетической управляющей системы [1, 2]. Определим ее схему, информацию, координаты и функцию. Схема управляющей системы приведена на рисунке. На ней присутствуют следующие блоки: 1) случайная среда СС, формирующая входные потоки (на рисунке $d=2$); 2) входные потоки Π_1, Π_2 требований — первый тип входных полюсов; 3) потоки насыщения Π'_1, Π'_2 — второй тип входных полюсов; 4) накопители O_1, O_2 — внешняя память; 5) устройства β_1, β_2 по организации дисциплины очереди в накопителях — блок переработки информации во внешней памяти; 6) обслуживающее устройство ОУ — внутренняя память; 7) граф смены состояния обслуживающего устройства — устройство по переработке информации во внутренней памяти; 8) выходные потоки $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$ — выходные полюса. Набор состояний среды, очередей в накопителях, обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяет информацию управляющей системы. Номера состояний среды, входных потоков, накопителей, механизмов по формированию очереди и номер состояния обслуживающего устройства задают расположение блоков на схеме. Функция этой системы — обслуживание конфликтных потоков алгоритмом с продлениями.

Обозначим $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}\}$, $X = \{0,1,\ldots\} \times \{0,1,\ldots\}$. Введем отображения $v : \Gamma \times X \to \{T_1, T_2\}$, $u : \Gamma \times X \to \Gamma$ следующим образом. Для $\Gamma^{(j)} \in \Gamma$ и $x = (x_1, x_2) \in X$ пусть $v(\Gamma^{(j)}, x)$ принимает значение T_1, если $\Gamma^{(j)} = \Gamma^{(2)}$ и $x_1 > 0$, в противном случае принимает значение T_2; $u(\Gamma^{(j)}, x)$ принимает значение $\Gamma^{(1)}$, если $\Gamma^{(j)} = \Gamma^{(2)}$ и $x_1 > 0$, в противном случае принимает значение $\Gamma^{(2)}$. Пусть $\tau_0 = 0$, $\Gamma_0 \in \Gamma$ — состояние обслуживающего устройства в момент τ_0, $\kappa_{j,0}$ — число требований в накопителе O_j в момент τ_0, $\kappa_0 = (\kappa_{1,0}, \kappa_{2,0})$, χ_{-1} — состояние случайной среды в момент τ_0. Определим рекуррентные по $i = 0, 1, \ldots$ соотношения: $\tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i, \kappa_i)$, $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i)$ — состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\kappa_{j,i+1}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_{i+1}, $\kappa_{i+1} = (\kappa_{1,i+1}, \kappa_{2,i+1})$. Промежуток $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ будем называть i-м тактом. Чтобы формализовать функциональную связь между состояниями случайной среды и внешней памяти в соседние моменты наблюдения, введем следующие величины и отображения. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на интервале $(0,1)$, отображение $\Xi : \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(d)}\} \times (0,1) \to \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(d)}\}$ принимает в точке $(e^{(l)}, a)$ значение $e^{(1)}$ при $0 < a < a_{l,1}$, значение $e^{(k)}$ при $a_{l,1} + a_{l,2} + \ldots + a_{l,k-1} \le a < a_{l,1} + a_{l,2} + \ldots + a_{l,k}$. Тогда последовательность, образованная рекуррентным соотношением $\chi_{i+1} = \Xi(\chi_i, \alpha_i)$, будет марковской цепью, отображающей смену состояний случайной среды. Именно, χ_i задает состояние среды на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Обозначим $\xi_{j,i}$ максимально возможное число требований потока Π_j, обслуженных на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\overline{\xi}_{j,i}$ число фактически обслуженных требований потока Π_j на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\eta_{j,i}$ число требований потока Π_j, поступивших на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Легко видеть справедливость соотношений: $\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}$, $\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}$. Положим $\overline{\xi}_i = (\overline{\xi}_{1,i}, \overline{\xi}_{2,i})$, $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$. Итак, получено соотношение

$$(\Gamma_{i+1}, \kappa_{i+1}, \chi_{i+1}) = (u(\Gamma_i, \kappa_i), \max\{0, \kappa_i + \eta_i - \xi_i\}, \Xi(\chi_i, \alpha_i)),$$

позволяющая конструктивно построить и изучить искомую управляемую последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i = 0, 1, \ldots\}$. Отметим, что аналогично дальнейшему можно изучить более громоздкий процесс $\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i, \overline{\xi}_i); i = 0, 1, \ldots\}$.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Для задания нелокального описания [1] входных потоков и потоков насыщения перечислим свойства условных распределений точечных процессов $\{(\tau_i, \eta_i, \nu_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с меткой $\nu_i = (\Gamma_i, \kappa_i)$ и $\{(\tau_i, \xi_i, \nu'_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с меткой $\nu'_i = \Gamma_i$. Положим $f_j^{(k)}(z) = \sum_{c=1}^{\infty} z^c p_c^{(j,k)}$ и определим величины $\varphi(b; T, j, k)$ из разложения $\exp\{\lambda_j^{(k)} T (f_j^{(k)}(z) - 1)\} = \sum_{b=0}^{\infty} \varphi(b; T, j, k) z^b$, $T > 0$. Так определенная величина $\varphi(b; T, j, k)$ есть вероятность поступления b вызовов потока Π_j за время T при состоянии среды $e^{(k)}$. Например, для потока Пуассона $\varphi(b; T, j, k) = (\lambda_j^{(k)} T)^b (b!)^{-1} \exp\{-\lambda_j^{(k)} T\}$, для потока Бартлетта выражение приведено в [1]. Заметим, что в перечисленных частных случаях ряд $f_j^{(k)}(z)$ сходится как минимум в некотором круге $|z| \le 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В дальнейшем будем предполагать именно такой вид области сходимости. Тогда для $b = (b_1, b_2) \in X$, $y = (y_1, y_2) \in \{(0, 0), (\ell_1, 0), (0, \ell_2)\}$, $r \in \{1, 2\}$, $\Gamma^{(j_{\tilde{i}})} \in \Gamma$, $x^{(\tilde{i})} \in X$, $e^{(k_{\tilde{i}})} \in \{e^{(1)}, e^{(2)}\}$, $0 \le \tilde{i} \le i$, имеем

$$P(\{\eta_i = b, \xi_i = y\} \mid \{\Gamma_{\tilde{i}} = \Gamma^{(j_{\tilde{i}})}, \kappa_{\tilde{i}} = x^{(\tilde{i})}, \chi_{\tilde{i}} = e^{(k_{\tilde{i}})}, 0 \le \tilde{i} \le i\}) =$$

$$= P(\{\eta_{1,i} = b_1\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j_i)}, \kappa_i = x^{(i)}, \chi_i = e^{(k_i)}\}) \times$$

$$\times P(\{\eta_{2,i} = b_2\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j_i)}, \kappa_i = x^{(i)}, \chi_i = e^{(k_i)}\}) \times$$

$$\times P(\{\xi_{1,i} = y_1\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j_i)}, \kappa_i = x^{(i)}, \chi_i = e^{(k_i)}\}) \times$$

$$\times P(\{\xi_{2,i} = y_2\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j_i)}, \kappa_i = x^{(i)}, \chi_i = e^{(k_i)}\}),$$

$$P(\{\eta_{r,i} = b_r\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j)}, \kappa_i = x, \chi_i = e^{(k)}\}) = \varphi(b_r; \nu(\Gamma^{(j)}, x), u(\Gamma^{(j)}, x), k),$$

$$P(\{\xi_{r,i} = \ell_r\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j)}, \kappa_i = x, \chi_i = e^{(k)}\}) = 1, \text{ если } u(\Gamma^{(j)}, x) = \Gamma^{(r)},$$

$$P(\{\xi_{r,i} = 0\} \mid \{\Gamma_i = \Gamma^{(j)}, \kappa_i = x, \chi_i = e^{(k)}\}) = 1, \text{ если } u(\Gamma^{(j)}, x) \ne \Gamma^{(r)}.$$

Для управляемой случайной последовательности

$$\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i = 0, 1, \ldots\} \tag{1}$$

справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \chi_i); i = 0, 1, \ldots\}$, $\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i = 0, 1, \ldots\}$ при заданном распределении вектора $(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)$ являются марковскими.

В остальной части работы мы будем изучать свойства последовательности (1). Обозначим

$$Q_i(x_1, x_2; j, k) = P(\{\Gamma_i = \Gamma^{(j)}, \kappa_i = (x_1, x_2), \chi_i = e^{(k)}\}).$$

Теорема 2. Имеют место рекуррентные по $i = 0,\ 1, \ldots$ соотношения

$$Q_{i+1}(0, w_2; 1, k) = \sum_{l=1}^{d} a_{l,k} \sum_{x_1=0}^{\ell_1} \sum_{x_2=0}^{w_2} Q_i(x_1, x_2; 2, l) \varphi(w_2 - x_2; T_1, 2, l) \sum_{b=0}^{\ell_1 - x_1} \varphi(b; T_1, 1, l),$$

$$Q_{i+1}(w_1, w_2; 1, k) = \sum_{l=1}^{d} a_{l,k} \sum_{x_1=0}^{w_1+\ell_1} \sum_{x_2=0}^{w_2} Q_i(x_1, x_2; 2, l) \varphi(w_1 + \ell_1 - x_1; T_1, 1, l) \varphi(w_2 - x_2; T_1, 2, l),$$

$$Q_{i+1}(w_1,0;2,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\left(\sum_{x_1=0}^{w_1}\sum_{x_2=0}^{\ell_2}Q_i(x_1,x_2;1,l)\varphi(w_1-x_1;T_2,1,l)\sum_{b=0}^{\ell_2-x_2}\varphi(b;T_2,2,l)+\right.$$

$$\left.+\sum_{x_2=0}^{\ell_2}Q_i(0,x_2;2,l)\varphi(w_1;T_2,1,l)\sum_{b=0}^{\ell_2-x_2}\varphi(b;T_2,2,l)\right),$$

$$Q_{i+1}(w_1,w_2;2,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\sum_{x_2=0}^{w_2+\ell_2}\varphi(w_2+\ell_2-x_2;T_2,2,l)\Big(Q_i(0,x_2;2,l)\varphi(w_1;T_1,1,l)+$$

$$+\sum_{x_1=0}^{w_1}Q_i(x_1,x_2;1,l)\varphi(w_1-x_1;T_2,1,l)\Big).$$

Введем производящие функции $\Psi_i(v_1,v_2,j,k)=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}v_1^{x_1}v_2^{x_2}Q_i(x_1,x_2;j,k)$, $\Phi_i(v_1,v_2,k)=\sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}v_1^{x_1}v_2^{x_2}Q_i(x_1,x_2;2,k)$ соответствующих распределений, сходящиеся, по крайней мере, в области $\max\{|v_1|,|v_2|\}\le 1$. Учитывая рекуррентные соотношения из теоремы 2, получим следующую теорему.

Теорема 3. Имеют место рекуррентные по $i=0,1,\ldots$ соотношения

$$\Psi_{i+1}(v_1,v_2,1,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\Big(v_1^{-\ell_1}\exp\{\lambda_1^{(l)}T_1(f_1^{(l)}(v_1)-1)+\lambda_2^{(l)}T_1(f_2^{(l)}(v_2)-1)\}\Phi_i(v_1,v_2,l)+$$

$$+\exp\{\lambda_2^{(l)}T_1(f_2^{(l)}(v_2)-1)\}\sum_{x_1=1}^{\ell_1}\sum_{x_2=0}^{\infty}v_2^{x_2}Q_i(x_1,x_2;2,l)\sum_{b=0}^{\ell_1-x_1}\varphi(b;T_1,1,l)(1-v_1^{b-\ell_1+x_1})\Big),$$

$$\Psi_{i+1}(v_1,v_2,2,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\Big(v_2^{-\ell_2}\exp\{\lambda_1^{(l)}T_2(f_1^{(l)}(v_1)-1)+\lambda_2^{(l)}T_2(f_2^{(l)}(v_2)-1)\}(\Psi_i(v_1,v_2,l)+\Psi_i(0,v_2,2,l))+$$

$$+\exp\{\lambda_1^{(l)}T_2(f_1^{(l)}(v_1)-1)\}\sum_{x_2=0}^{\ell_2}\sum_{b=0}^{\ell_2-x_2}\varphi(b;T_2,2,l)(1-v_2^{b-\ell_2+x_2})(Q_i(0,x_2;2,l)+\sum_{x_1=0}^{\infty}Q_i(x_1,x_2;1,l)v_1^{x_1})\Big).$$

В теореме 2 фактически вычислены одношаговые переходные вероятности марковской цепи (1). Из их вида можно заключить, что все состояния этой цепи являются существенными и сообщающимися. Следовательно [3], либо существует единственное стационарное распределение цепи (1), либо для всякого состояния $(\Gamma^{(j)},x,e^{(k)})$ и независимо от начального распределения имеет место соотношение

$$\lim_{i\to\infty}Q_i(x_1,x_2;j,k)=0. \tag{2}$$

Предположим, что изменение состояния случайной среды описывается неразложимой непериодической марковской цепь. Случай периодической цепи изучается аналогично. Тогда существует единственное стационарное распределение вероятностей этой цепи. Обозначим $\mathbf{a}_k$ стационарную вероятность состояния $e^{(k)}$. Обозначим $\mu_j^{(k)}=\sum_{c=1}^{\infty}cp_c^{(j,k)}$ средний размер группы по потоку Π_j при состоянии среды $e^{(k)}$.

Теорема 4. Для существования стационарного распределения марковской цепи (1) достаточно выполнения неравенств

$$(\mathbf{a}_1\lambda_1^{(1)}\mu_1^{(1)}+\mathbf{a}_2\lambda_1^{(2)}\mu_1^{(2)}+\ldots+\mathbf{a}_d\lambda_1^{(d)}\mu_1^{(d)})(T_1+T_2)-\ell_1<0,$$

$$\lambda_2^{(l)}\mu_2^{(l)}T_1+\lambda_2^{(k)}\mu_2^{(k)}T_2-\ell_2<0,\ l,\ k=1,2,\ldots,d.$$

Доказательство. Допустим, что выполнены неравенства из формулировки теоремы, а стационарного распределения цепи (1) не существует. Тогда для всякого состояния $(\Gamma^{(j)},x,e^{(k)})$ должно иметь место соотношение (2). Из соотношения (2) легко вывести, что последовательность $\{\mathrm{E}(\kappa_{1,i}+\kappa_{2,i});i=0,1,\ldots\}$ неограниченно возрастает. Покажем, что последовательности $\{\mathrm{E}\,\kappa_{1,i};i=0,1,\ldots\}$, $\{\mathrm{E}\,\kappa_{2,i};i=0,1,\ldots\}$, а следовательно, и последовательность $\{\mathrm{E}(\kappa_{1,i}+\kappa_{2,i});i=0,1,\ldots\}$ на самом деле ограничены.

Рассмотрим последовательность $\{\mathrm{E}\,\kappa_{1,i};i=0,1,\ldots\}$. Положим в рекуррентных соотношениях теоремы 3 $v_2=1$. Получим:

$$\Psi_{i+1}(v_1,1,1,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\Big(v_1^{-\ell_1}\exp\{\lambda_1^{(l)}T_1(f_1^{(l)}(v_1)-1)\}\Phi_i(v_1,1,l)+ \\ +\sum_{x_1=1}^{\ell_1-1}\sum_{x_2=0}^{\infty}Q_i(x_1,x_2;2,l)\sum_{b=0}^{\ell_1-x_1}\varphi(b;T_1,1,l)(1-v_1^{b-\ell_1+x_1})\Big), \tag{3}$$

$$\Psi_{i+1}(v_1,1,2,k)=\sum_{l=1}^{d}a_{l,k}\exp\{\lambda_1^{(l)}T_2(f_1^{(l)}(v_1)-1)\}(\Psi_i(v_1,1,l)+\Psi_i(0,1,2,l)). \tag{4}$$

Выберем начальное распределение цепи (1) так, чтобы все производящие функции сходились в области $|v_1|\le 1+\varepsilon_1$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, $|v_2|\le 1+\varepsilon_2$, $0<\varepsilon_2<\varepsilon$. Суммируя соотношение (4) по $k=1,2,\ldots,d$ и применяя затем соотношение (3), получим:

$$\sum_{k=1}^{d}\Psi_{i+2g}(v_1,1,2,k)=\sum_{\theta_1=1}^{d}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)\}(\Psi_{i+2g-1}(v_1,1,1,\theta_1)+\Psi_{i+2g-1}(0,1,2,\theta_1))= \\ =\sum_{\theta_2=1}^{d}\sum_{\theta_1=1}^{d}a_{\theta_2,\theta_1}\Big(v_1^{-\ell_1}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)}T_1(f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\Phi_{i+2g-2}(v_1,1,\theta_2)+ \\ +\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)\}\sum_{x_1=1}^{\ell_1-1}\sum_{x_2=0}^{\infty}Q_{i+2g-2}(x_1,x_2;2,\theta_2)\sum_{b=0}^{\ell_1-x_1}\varphi(b;T_1,1,\theta_2)(1-v_1^{b-\ell_1+x_1})\Big)+ \\ +\sum_{\theta_1=1}^{d}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)\}\Psi_{i+2g-1}(0,1,2,\theta_1).$$

Заметим, что при $1<v_1<1+\varepsilon_1$ правая часть не больше, чем

$$\sum_{\theta_2=1}^{d}\sum_{\theta_1=1}^{d}a_{\theta_2,\theta_1}v_1^{-\ell_1}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)}T_1(f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\Psi_{i+2g-2}(v_1,1,2,\theta_2)+C_1,$$

где

$$C_1=\sum_{\theta_2=1}^{d}\sum_{\theta_1=1}^{d}a_{\theta_2,\theta_1}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)\}\sum_{x_1=1}^{\ell_1-1}\sum_{b=0}^{\ell_1-x_1}\varphi(b;T_1,1,\theta_2)(1-v_1^{b-\ell_1+x_1})+ \\ +\sum_{\theta_1=1}^{d}\exp\{\lambda_1^{(\theta_1)}T_2(f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)\}>0.$$

Снова применяя соотношения (3), (4), найдем:

$$\sum_{\theta_2=1}^{d}\sum_{\theta_1=1}^{d} a_{\theta_2,\theta_1} v_1^{-\ell_1} \exp\{\lambda_1^{(\theta_1)} T_2 (f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)} T_1 (f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\Psi_{i+2g-2}(v_1,1,2,\theta_2) \le$$

$$\le \sum_{\theta_4=1}^{d}\sum_{\theta_3=1}^{d}\sum_{\theta_2=1}^{d}\sum_{\theta_1=1}^{d} a_{\theta_4,\theta_3} a_{\theta_3,\theta_2} a_{\theta_2,\theta_1} v_1^{-2\ell_1} \exp\{\lambda_1^{(\theta_1)} T_2 (f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)} T_1 (f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\times$$

$$\times \exp\{\lambda_1^{(\theta_3)} T_2 (f_1^{(\theta_3)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_4)} T_1 (f_1^{(\theta_4)}(v_1)-1)\}\Psi_{i+2g-4}(v_1,1,2,\theta_4)+C_2,$$

где $C_2>0$. Повторяя эту процедуру достаточное число раз, установим неравенство:

$$\sum_{k=1}^{d} \Psi_{i+2g}(v_1,1,2,k) \le \sum_{\theta_{2g}=1}^{d}\sum_{\theta_{2g-1}=1}^{d}\dots\sum_{\theta_1=1}^{d} a_{\theta_{2g},\theta_{2g-1}} a_{\theta_{2g-1},\theta_{2g-2}} \dots a_{\theta_2,\theta_1} v_1^{-g\ell_1}\times$$

$$\times \exp\{\lambda_1^{(\theta_1)} T_2 (f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)} T_1 (f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\exp\{\lambda_1^{(\theta_3)} T_2 (f_1^{(\theta_3)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_4)} T_1 (f_1^{(\theta_4)}(v_1)-1)\}\times$$

$$\times\ldots\times\exp\{\lambda_1^{(\theta_{2g-1})} T_2 (f_1^{(\theta_{2g-1})}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_{2g})} T_1 (f_1^{(\theta_{2g})}(v_1)-1)\}\Psi_i(v_1,1,2,\theta_{2g})+C,$$

Обозначим $a_{l,k}^{(n)}$ вероятность перехода за n шагов случайной среды из состояния $e^{(l)}$ в состояние $e^{(k)}$, $a_{l,k}^{(1)}=a_{l,k}$, $a_{l,k}^{(0)}=\delta_{l,k}$, $\delta_{l,k}$ – символ Кронекера. Производная в точке $v_1=1$ от выражения, стоящего сомножителем при $\Psi_i(v_1,1,2,\theta_{2g})$ равна

$$\frac{d}{dv_1}\sum_{\theta_{2g}=1}^{d}\sum_{\theta_{2g-1}=1}^{d}\dots\sum_{\theta_1=1}^{d} a_{\theta_{2g},\theta_{2g-1}} a_{\theta_{2g-1},\theta_{2g-2}} \dots a_{\theta_2,\theta_1} v_1^{-g\ell_1} \exp\{\lambda_1^{(\theta_1)} T_2 (f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)} T_1 (f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\times$$

$$\times \exp\{\lambda_1^{(\theta_3)} T_2 (f_1^{(\theta_3)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_4)} T_1 (f_1^{(\theta_4)}(v_1)-1)\}\times\ldots\times\exp\{\lambda_1^{(\theta_{2g-1})} T_2 (f_1^{(\theta_{2g-1})}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_{2g})} T_1 (f_1^{(\theta_{2g})}(v_1)-1)\}\Big|_{v_1=1}=$$

$$=T_2\sum_{\theta=1}^{d}\lambda_1^{(\theta)}\mu_1^{(\theta)}(a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-1)}+a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-3)}+\ldots+a_{\theta_{2g},\theta}^{(1)})+T_1\sum_{\theta=1}^{d}\lambda_1^{(\theta)}\mu_1^{(\theta)}(a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-2)}+a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-4)}+\ldots+a_{\theta_{2g},\theta}^{(0)})-g\ell_1.$$

Поскольку состояния среды образуют, по предположению, единственный непериодический класс, имеют место предельные соотношения $\lim\limits_{g\to\infty}(a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-1)}+a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-3)}+\ldots+a_{\theta_{2g},\theta}^{(1)})g^{-1}=\mathbf{a}_\theta$, $\lim\limits_{g\to\infty}(a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-2)}+a_{\theta_{2g},\theta}^{(2g-4)}+\ldots+a_{\theta_{2g},\theta}^{(0)})g^{-1}=\mathbf{a}_\theta$. Поэтому, выбирая g достаточно большим, добьемся того, чтобы знак производной совпал со знаком выражения $(T_1+T_2)\sum\limits_{\theta=1}^{d}\lambda_1^{(\theta)}\mu_1^{(\theta)}\mathbf{a}_\theta-\ell_1<0$. Обозначим

$$R_+=\max_{1\le\theta_{2g}\le d}\{\sum_{\theta_{2g}=1}^{d}\sum_{\theta_{2g-1}=1}^{d}\dots\sum_{\theta_1=1}^{d} a_{\theta_{2g},\theta_{2g-1}} a_{\theta_{2g-1},\theta_{2g-2}} \dots a_{\theta_2,\theta_1} v_1^{-g\ell_1} \exp\{\lambda_1^{(\theta_1)} T_2 (f_1^{(\theta_1)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_2)} T_1 (f_1^{(\theta_2)}(v_1)-1)\}\times$$

$$\times \exp\{\lambda_1^{(\theta_3)} T_2 (f_1^{(\theta_3)}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_4)} T_1 (f_1^{(\theta_4)}(v_1)-1)\}\times\ldots\times\exp\{\lambda_1^{(\theta_{2g-1})} T_2 (f_1^{(\theta_{2g-1})}(v_1)-1)+\lambda_1^{(\theta_{2g})} T_1 (f_1^{(\theta_{2g})}(v_1)-1)\}\}.$$

Заметим, что $R_+<1$ в некоторой окрестности справа от точки $v_1=1$. Числовая последовательность

$$M_0=\sum\nolimits_{k=1}^{d}\Psi_0(v_1,1,2,k),\ M_1=\sum\nolimits_{k=1}^{d}\Psi_1(v_1,1,2,k),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ M_{2g-1}=\sum\nolimits_{k=1}^{d}\Psi_{2g-1}(v_1,1,2,k),\ M_{i+2g}=R_+M_i+C,\ i=0,1,\ldots$$

сходится, следовательно, она ограничена. В то же время, $0\le\sum\nolimits_{k=1}^{d}\Psi_i(v_1,1,2,k)\le M_i$ для $i=0,1,\ldots$ Нетрудно видеть, что и последовательность

$$\left\{ \frac{d}{dv_1} \sum_{k=1}^{d} (\Psi_i(v_1,1,1,k) + \Psi_i(v_1,1,2,k)) \Big|_{v_1=1} = \mathrm{E}\,\kappa_{1,i};\ i = 0,1,\ldots \right\}$$

будет ограничена в силу интегральной формулы Коши.

Теперь обратимся к доказательству ограниченности последовательности $\{\mathrm{E}\,\kappa_{2,i};\ i = 0,1,\ldots\}$. Положим теперь в соотношениях теоремы 3 $v_1 = 1$. Получим:

$$\Psi_{i+1}(1, v_2, 1, k) = \sum_{l=1}^{d} a_{l,k} \exp\{\lambda_2^{(l)} T_1 (f_2^{(l)}(v_2) - 1)\} \Phi_i(1, v_2, l), \tag{5}$$

$$\Psi_{i+1}(1, v_2, 2, k) = \sum_{l=1}^{d} a_{l,k} \Big(v_2^{-\ell_2} \exp\{\lambda_2^{(l)} T_2 (f_2^{(l)}(v_2) - 1)\} (\Psi_i(1, v_2, l) + \Psi_i(0, v_2, 2, l)) +$$

$$+ \sum_{x_2=0}^{\ell_2} \sum_{b=0}^{\ell_2 - x_2} \varphi(b; T_2, 2, l)(1 - v_2^{\,b - \ell_2 + x_2})(Q_i(0, x_2; 2, l) + \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_i(x_1, x_2; 1, l))\Big). \tag{6}$$

Напомним, что в силу специального выбора начального распределения все соотношения можно рассматривать в круге $|v_2| \le 1 + \varepsilon_2$, $1 < v_2 < 1 + \varepsilon_2$. Из условий теоремы следует неравенство $\lambda_2^{(l)} \mu_2^{(l)} T_2 - \ell_2 < \lambda_2^{(l)} \mu_2^{(l)} T_1$, с помощью которого и из соотношений (5), (6) получим:

$$\sum_{k=1}^{d} (\Psi_{i+2}(1, v_2, 1, k) + \Psi_{i+2}(1, v_2, 2, k)) \le \sum_{l=1}^{d} (\exp\{\lambda_2^{(l)} T_1 (f_2^{(l)}(v_2) - 1)\} (\Phi_{i+1}(1, v_2, l) +$$

$$+ \Psi_{i+1}(0, v_2, 2, k)) + v_2^{-\ell_2} \exp\{\lambda_2^{(l)} T_2 (f_2^{(l)}(v_2) - 1)\} \Psi_{i+1}(1, v_2, 1, l) +$$

$$+ \sum_{x_2=0}^{\ell_2} \sum_{b=0}^{\ell_2 - x_2} \varphi(b; T_2, 2, l)(1 - v_2^{\,b + x_2 - \ell_2})). \tag{7}$$

Из определения производящих функций, $\Phi_{i+1}(1, v_2, l) + \Psi_{i+1}(0, v_2, 2, l) = \Psi_{i+1}(1, v_2, 2, l)$. Повторное применение соотношений (5) и (6) в правой части неравенства (7) приводит к оценке

$$\sum_{k=1}^{d} (\Psi_{i+2}(1, v_2, 1, k) + \Psi_{i+2}(1, v_2, 2, k)) \le \tilde{R}_+ \sum_{\theta=1}^{d} (\Psi_i(1, v_2, 1, \theta) + \Psi_i(1, v_2, 2, \theta)) + \tilde{C},$$

где $\tilde{C} > 0$, а

$$\tilde{R}_+ = \max_{1 \le l, \theta \le d} \{ v_2^{-\ell_2} \exp\{\lambda_2^{(l)} T_1 (f_2^{(l)}(v_2) - 1) + \lambda_2^{(\theta)} T_2 (f_2^{(\theta)}(v_2) - 1)\}\} < 1.$$

Теперь мажорирующая последовательность легко строится и доказательство ограниченности последовательности $\{\mathrm{E}\,\kappa_{2,i};\ i = 0,1,\ldots\}$ завершается так же, как в первой чести. Таким образом, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоткин, М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М. : Наука, 1996. С. 51–70.

2. *Ляпунов, А. А.* Теоретические проблемы кибернетики / А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматгиз. 1963. С. 5–22.

3. *Ширяев, А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. Кн. 2 / А. Н. Ширяев. М.: МЦНМО, 2004.