ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. Н. Дудин, В. И. Клименок

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: dudin@bsu.by, klimenok@bsu.by

Приведено достаточное условие эргодичности и получен численно устойчивый алгоритм нахождения инвариантного распределения вероятностей для многомерных пространственно неоднородных цепей Маркова с непрерывным временем, имеющих генератор, отличающийся блочным ненулевым столбцом от генераторов верхне-Хессенбергова типа и обладающий определенными асимптотическими свойствами.

Ключевые слова: многомерные цепи Маркова, эргодичность, инвариантное распределение.

Цепи Маркова являются одним из основных математических объектов, используемых при моделировании стохастических систем. Многомерные цепи Маркова, имеющие более одной компоненты, пространство состояний которой не является конечным, поддаются исследованию только в очень редких случаях. Значительно более исследованными и востребованными в стохастическом моделировании являются многомерные цепи Маркова, имеющие одну компоненту, пространство состояний которой является счетным, а остальные компоненты имеют конечное пространство состояний. Без ограничения общности можно формально объединить все компоненты, имеющие конечное пространство состояний, например, используя лексикографическое упорядочивание состояний, в одну компоненту и свести многомерную цепи Маркова к двумерной. Это не всегда является оправданным с точки зрения возможности получения красивых аналитических результатов (ввиду недостаточного учета возможной специфики взаимодействия различных конечных компонент), но является полезным с точки зрения возможности описания матриц переходных вероятностей или инфинитезимальных генераторов таких цепей в виде блочных матриц.

Если эти блочные матрицы не имеют какой-либо специальной структуры, конструктивное исследование соответствующих цепей Маркова не представляется возможным. Поэтому интересной и практически важной задачей является выявление специальных структур блочных матриц переходных вероятностей или инфинитезимальных генераторов, для которых удается успешно провести анализ условий эргодичности и построить алгоритмы нахождения инвариантной вероятностной меры. Основополагающие результаты для двух важных специальных структур блочных матриц (матрица имеет блочно-верхне-Хессенбергову или блочно-нижне-Хессенбергову форму и является блочно-Теплицевой, за исключением, быть может, нескольких первых блочных строк), так называемых матриц типа M/G/1 и G/M/1, были получены М. Ньютсом, см. [1,2]. В данной работе выделяется еще одна специальная структура, для которой удается провести конструктивный анализ соответствующей цепи Маркова.

При описании некоторых систем массового обслуживания, например, систем с повторными вызовами с катастрофическими сбоями и систем с нетерпеливыми запросами, возникает необходимость анализа стационарного распределения многомерных цепей Маркова с непрерывным временем, блочный инфинитезимальный генератор которых имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & Q_{0,2} & Q_{0,3} & Q_{0,4} & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & \cdots \\ Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & \cdots \\ Q_{3,0} & O & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & \cdots \\ Q_{4,0} & O & O & Q_{4,3} & Q_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{1}$$

где блоки $Q_{i,j}$ являются матрицами конечного размера, O - нулевые матрицы .

Этот генератор отличается от генератора пространственно неоднородных верхне-Хессенберговых цепей Маркова вида

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_{0,0} & \widetilde{Q}_{0,1} & \widetilde{Q}_{0,2} & \widetilde{Q}_{0,3} & \widetilde{Q}_{0,4} & \cdots \\ \widetilde{Q}_{1,0} & \widetilde{Q}_{1,1} & \widetilde{Q}_{1,2} & \widetilde{Q}_{1,3} & \widetilde{Q}_{1,4} & \cdots \\ O & \widetilde{Q}_{2,1} & \widetilde{Q}_{2,2} & \widetilde{Q}_{2,3} & \widetilde{Q}_{2,4} & \cdots \\ O & O & \widetilde{Q}_{3,2} & \widetilde{Q}_{3,3} & \widetilde{Q}_{3,4} & \cdots \\ O & O & O & \widetilde{Q}_{4,3} & \widetilde{Q}_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \tag{2}$$

наличием дополнительного ненулевого блочного столбца.

В статье [3] были исследованы цепи Маркова, имеющие генератор вида (2), в предположении о том, что существуют следующие конечные пределы блоков $\widetilde{P}_{i,j}$ матрицы переходных вероятностей дискретной цепи Маркова, характеризующей поведение цепи Маркова с генератором вида (2) в моменты ее скачков (jump Markov chain, см. [4]):

$$\widetilde{Y}_k = \lim_{i\to\infty} \widetilde{P}_{i,i+k-1},\ k \ge 0, \tag{3}$$

$$\widetilde{P}_{i,j} = \widetilde{R}_i^{-1}\widetilde{Q}_{i,j},\ i \ne j,\ i, j \ge 0,$$

$$\widetilde{P}_{i,i} = \widetilde{R}_i^{-1}\widetilde{Q}_{i,i} + I,\ i \ge 0.$$

Здесь $\widetilde{R}_i^{-1}$ - неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой с точностью до знака совпадают с соответствующими диагональными элементами матрицы $\widetilde{Q}_{i,i}$, $i \ge 0$, I - тождественная матрица.

Цепи, для которых выполняется условие (3), названы в [3] асимптотически квазитеплицевыми цепями Маркова. В [3] доказано условие эргодичности цепей Маркова такого вида и предложен устойчивый алгоритм нахождения их инвариантного распределения, основанный на построении семейства цепей Маркова, сенсорирующих данную цепь.

В данной работе кратко проводятся результаты аналогичного анализа для более общих цепей Маркова с генератором вида (1).

Так же, как и в [3], будем предполагать существование конечных пределов

$$Y_k = \lim_{i\to\infty} P_{i,i+k-1},\ k \ge 0, \tag{4}$$

где

$$P_{i,j} = R_i^{-1} Q_{i,j},\ i \ne j,\ i,j \ge 0,$$
$$P_{i,i} = R_i^{-1} Q_{i,i} + I,\ i \ge 0,$$

R_i^{-1} - неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой с точностью до знака совпадают с диагональными элементами матрицы $Q_{i,i},\ i \ge 0$.

Также предполагаем существование пределов

$$Y_* = \lim_{i\to\infty} P_{i,0}, \tag{5}$$

где

$$P_{i,0} = R_i^{-1} Q_{i,0},\ i \ge 0.$$

Теорема 1. Неприводимая регулярная цепь Маркова $\xi_t = (i_t, m_t),\ t \ge 0,\ i_t \ge 0,\ m_t = \overline{1,M}$, где M - некоторое целое число, является эргодичной если выполняется условие

$$Y_* e > 0, \tag{6}$$

где e - вектор-столбец, состоящий из единиц, $\mathbf{0}$ - вектор-столбец состоящий из нулей.

Замечание 1. Условие (6) является достаточным условием эргодичности. При его нарушении цепь может быть эргодичной при выполнении дополнительных условий на матрицу $\sum_{k=0}^{\infty} kY_k$. Соответствующий результат может быть доказан следуя технике, описанной в [5].

Предположим, что цепь Маркова $\xi_t = (i_t, m_t),\ t \ge 0$, эргодична. Рассмотрим проблему нахождения инвариантного (стационарного) распределения этой цепи.

Пусть $g_i(m, m')$ есть условная вероятность того, что, стартуя из состояния $(i+1, m)$ и не посещая состояний вида $(0,\bullet)$, цепь Маркова $\xi_t = (i_t, m_t),\ t \ge 0$, достигает множества состояний $(i,\bullet)$ в состоянии (i, m'), $m, m' = \overline{1,M},\ i \ge 1$.

Пусть $h_i(m, m')$ есть условная вероятность того, что, стартуя из состояния (i, m) и не посещая состояния вида $(i-1,\bullet)$, цепь Маркова $\xi_t,\ t \ge 0$, достигает множества состояний $(0,\bullet)$ в состоянии $(0, m')$, $m, m' = \overline{1,M},\ i \ge 2$.

Пусть $h_1(m, m')$ есть условная вероятность того, что, стартуя из состояния $(1, m)$, цепь Маркова $\xi_t,\ t \ge 0$, достигает множества состояний $(0,\bullet)$ в состоянии $(0, m')$, $m, m' = \overline{1,M}$.

Обозначим

$$G_i = (g_i(m, m')),\ m, m' = \overline{1,M},\ i \ge 0,$$
$$H_i = (h_i(m, m')),\ m, m' = \overline{1,M},\ i \ge 1,$$

Нетрудно видеть, что матрица G_i является аналогом матрицы G, введенной М. Ньютсом (см. [2]), для случая пространственно неоднородной цепи Маркова.

Лемма. Матрицы $G_i, H_i\ i \ge 1$, удовлетворяют следующим рекуррентным уравнениям:

$$G_i = \left(-Q_{i+1,i+1} - \sum_{k=2}^{\infty} Q_{i+1,i+k} G_{i+k-1} G_{i+k-2} \cdots G_{i+1} \right)^{-1} Q_{i+1,i}, \qquad (7)$$

$$H_i = -\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_{i,i+k} \prod_{l=i+k-1}^{i} G_l \right)^{-1} \left(Q_{i,0} + \sum_{k=0}^{\infty} Q_{i,i+k} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{l=i+k-1}^{i+m} G_l \, H_{i+m} \right), i \geq 1, \qquad (8)$$

где символ произведения матриц понимается в следующем смысле:

$\prod_{l=n}^{s} G_l = G_n G_{n-1} \ldots G_s$, если $n \geq s$, и $\prod_{l=n}^{s} G_l = I$ в противном случае.

Замечание 2. Матрицы $G_i, i \geq 1, H_i, i \geq 2$, являются субстохастическими. Матрица H_1 является стохастической.

Замечание 3. При выполнении условий эргодичности последовательность матриц G_i при i, стремящемся к бесконечности, сходится к матрице G, являющейся минимальным неотрицательным решением матричного уравнения

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k G^k.$$

Итерационные алгоритмы решения матричных уравнений такого типа хорошо изучены в литературе.

Последовательность матриц $H_i, i \geq 1$, сходится к матрице

$$H = \left(I - \sum_{k=0}^{\infty} Y_{k+1} \sum_{m=0}^{k} G^m \right)^{-1} Y_0.$$

Эта информация может быть использована для эффективной организации вычисления матриц $G_i, H_i \; i \geq 1$, на основе обратных рекурсий (7), (8).

Используя понятие сенсорной цепи Маркова, см., например, [6], по аналогии с [3] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\pi(i,m), i \geq 0, m = \overline{1,M}$, есть стационарное распределение вероятностей цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, и $\boldsymbol{\pi}_i = (\pi(i,1), \cdots, \pi(i,M)), i \geq 0$.

Векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{\pi}_i, i \geq 0$, могут быть вычислены следующим образом:

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_0 \Phi_i, i \geq 1, \qquad (9)$$

где матрицы $\Phi_i, i \geq 1$, вычисляются следующим образом:

$$\Phi_0 = I, \Phi_l = \Phi_{l-1}(-\hat{Q}_{l,l})^{-1}, l \geq 1, \qquad (10)$$

вектор $\boldsymbol{\pi}_0$ является единственным решением системы уравнений

$$\boldsymbol{\pi}_0(-\hat{Q}_{0,0}) = \mathbf{0}^T, \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{\pi}_0 \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l \boldsymbol{e} = 1, \qquad (12)$$

а матрицы $\hat{Q}_{l,l}, l \geq 0$, вычисляются следующим образом:

$$\hat{Q}_{0,0} = Q_{0,0} + Q_{0,1} H_1, \qquad (13)$$

$$\hat{Q}_{l,l} = Q_{l,l} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{l,l+k} G_{l+k-1} G_{l+k-2} \cdots G_l, l \geq 1. \qquad (14)$$

Замечание 4. Формулы (9)-(14) и (7), (8) задают численно устойчивую процедуру для нахождения векторов $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \geq 0$, поскольку все обратные матрицы, фигурирующие в (7), (8) и (10), существуют и являются неотрицательными матрицами.

Замечание 5. В случае пространственно однородных цепей, для которых выполняются условия $Q_{i,j} = Q(i-j), i > 0, j \geq i-1$, полученные результаты согласуются с результатами работы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neuts, M.F.* Structured Markov Chains of the M|G|1 Type and Their Applications / M.F. Neuts. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.

2. *Neuts, M.F.* Matrix-Geometric Solutions to Stochastic Models / M.F. Neuts. New York: Marcel Dekker, 1989.

3. *Klimenok, V.I.* Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory/ V.I. Klimenok, A.N. Dudin // Queueing Systems. 2006. V. 54. № 4. P. 245-259.

3. *Asmussen, S.* Applied Probability and Queues / S. Asmussen. New York : Springer-Verlag, 2003.

4. *Dudin, A.N.* Markov chains with hybrid repeated rows-upper-Hessenberg quasi-Toeplitz structure of block transition probability matrix / A.N. Dudin, C.S. Kim, V.I. Klimenok // Journal of Applied Probability. 2008. V. 45. № 1. P. 211-225.

5. *Kemeni, J.* Denumerable Markov chain/ J. Kemeni, J. Snell, A. Knapp. New York: Van Nostrand, 1966.

6. *Dudin, A.N.* Stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP|SM|1 queueing system with Markovian input of disasters/ A.N. Dudin, O.V. Semenova // Journal of Applied Probability. 2004. V. 42. № 2. p. 547-556.