АПОСТЕРИОРНЫЕ СРЕДНИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ

И. С. Шмырин

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: igor@fpmk.tsu.ru

Рассматривается задача оптимального оценивания параметров MAP-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока. Оценка параметров строится как апостериорное среднее. Находятся выражения для апостериорной плотности распределения вектора неизвестных параметров, формулируется алгоритм расчета оценок в произвольный момент времени.

Ключевые слова: MAP-поток, оценивание параметров, апостериорное среднее.

ВВЕДЕНИЕ

В современной литературе по теории массового обслуживания большое число работ посвящено исследованию систем обслуживания с нестационарными случайными потоками событий, или потоками со случайной интенсивностью, являющимися широко применяемой моделью реальных процессов – потоков информационных пакетов в современных информационно-вычислительных сетях, потоков элементарных частиц и т. д. Потоки такого рода называют также коррелированными потоками [1], дважды стохастическими потоками [2], BMAP (Batch Markovian Arrival Process)-потоками событий [3].

Очевидно, что режимы функционирования систем обслуживания (регистрирующих приборов), на вход которых поступает поток событий (заявок) со случайной интенсивностью, непосредственно зависят от значения интенсивности. С другой стороны, случайный процесс, определяющий изменение интенсивности входящего потока, недоступен наблюдению. Кроме этого, как правило, параметры случайного процесса являются неизвестными величинами. В силу этого при исследовании и решении различных оптимизационных задач для систем обслуживания с нестационарными случайными входящими потоками событий важной задачей является задача оценивания неизвестных параметров входящего потока событий. Примером решения таких задач могут служить работы [4–6]. В данной работе, с использованием результатов [7], решается задача оптимального оценивания параметров управляющего процесса MAP (Markovian Arrival Process)-потока событий, являющегося частным случаем более общей модели – BMAP-потока.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дадим описание математической модели МАР-потока событий, используя при этом термины и обозначения [1], [7]. Наступление событий потока определяется поведением марковского случайного процесса $\nu(t)$ с непрерывным временем и пространством состояний $\{1, 2, ..., n\}$. Время пребывания процесса $\nu(t)$ в состоянии i случайно и распределено экспоненциально с параметром λ_i, $i = \overline{1,n}$. По окончании пребывания процесса в состоянии i процесс переходит в состояние j, при этом в момент перехода может наступить событие потока. Вероятность того, что по окончании состояния i процесс $\nu(t)$ перейдет в состояние j и в момент перехода наступит k событий, есть величина $p_k(i,j)$, $i,j = \overline{1,n}$, $k = 0,1$. При этом полагается, что

$$p_0(i,i) = 0\,,\; i = \overline{1,n}\,, \tag{1}$$

то есть переход процесса $\nu(t)$ из состояния в то же самое состояние без наступления события невозможен. Для параметров λ_i экспоненциальных распределений времени пребывания процесса $\nu(t)$ в состояниях и вероятностей $p_k(i,j)$ переходов из состояния в состояние выполняются очевидные условия:

$$\begin{gathered} \lambda_i > 0,\; i = \overline{1,n}, \\ 0 \le p_k(i,j) \le 1,\; i,j = \overline{1,n},\; k = 0,1, \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} p_k(i,j) = 1,\; i = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{2}$$

Процесс $\nu(t)$ полагается ненаблюдаемым, параметры процесса (параметры распределений длительности состояний λ_i и вероятности переходов $p_k(i,j)$, $i,j = \overline{1,n}$, $k = 0,1$) полагаются неизвестными величинами. Наблюдениями за потоком событий являются моменты времени $t_1, t_2, ..., t_N$ наступления событий на интервале времени $[t_0, t]$, где t_0 – момент начала наблюдений, t – момент окончания наблюдений, $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N \le t$. Требуется по наблюдениям за потоком оценить в момент t окончания наблюдений вектор неизвестных параметров процесса $\nu(t)$:

$$\theta = (\lambda_i, p_k(i,j)),\; i,j = \overline{1,n},\; k = 0,1\,,$$

удовлетворяющих ограничениям (1), (2). В качестве оценки $\hat\theta(t)$ вектора параметров будем использовать апостериорное среднее:

$$\hat\theta(t) = \int_{\Theta} \theta p(\theta \mid t) d\theta\,, \tag{3}$$

где Θ – область значений вектора параметров θ, определяемая условиями (1), (2), $p(\theta \mid t)$ – апостериорная плотность распределения вектора θ в момент времени t. Заметим, что апостериорная средняя оценка параметров является оптимальной в смысле минимума среднеквадратического отклонения ошибки оценивания [8]. Согласно (3), для построения оценки $\hat\theta(t)$ необходимо найти выражение для апостериорной плотности $p(\theta \mid t)$.

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА ПАРАМЕТРОВ

Будем рассматривать установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения $[t_0, t]$ пренебрегаем. Тогда без потери общности рассуждений можно положить момент начала наблюдений $t_0 = 0$. Рассмотрим временной интервал $(t, t+\Delta t)$, где t – произвольный момент времени, Δt – сколь угодно малая величина. Обозначим $\vec{r}(t)$ – последовательность моментов времени наступления событий потока на интервале $[0,t]$, $\vec{r}(t+\Delta t)$ – последовательность моментов времени наступления событий потока на интервале $[0, t+\Delta t]$, $r(t, t+\Delta t)$ – события потока, наступившие на интервале $[t, t+\Delta t]$. Рассмотрим $p(\theta \mid \vec{r}(t))$ – искомая плотность распределения вектора параметров θ в момент времени t. Используя известную формулу условной вероятности, можно записать

$$p(\theta \mid \vec{r}(t)) = p(\theta)\frac{p(\vec{r}(t) \mid \theta)}{p(\vec{r}(t))}.$$

Записывая аналогичное выражение для плотности в момент $t+\Delta t$

$$p(\theta \mid \vec{r}(t+\Delta t)) = p(\theta)\frac{p(\vec{r}(t+\Delta t) \mid \theta)}{p(\vec{r}(t+\Delta t))}$$

и сравнивая две последние формулы, получаем

$$p(\theta \mid \vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} p(\theta \mid \vec{r}(t)) \frac{p(\vec{r}(t+\Delta t) \mid \theta)}{p(\vec{r}(t) \mid \theta)}. \tag{4}$$

В силу того что $\vec{r}(t+\Delta t) = (\vec{r}(t), r(t, t+\Delta t))$, по формуле условной вероятности можно записать

$$p(\vec{r}(t+\Delta t) \mid \theta) = p(\vec{r}(t), r(t, t+\Delta t) \mid \theta) = p(r(t, t+\Delta t) \mid \vec{r}(t), \theta) p(\vec{r}(t) \mid \theta),$$

так что (4) принимает вид:

$$p(\theta \mid \vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} p(\theta \mid \vec{r}(t)) p(r(t, t+\Delta t) \mid \vec{r}(t), \theta). \tag{5}$$

Рассмотрим выражение $p(r(t, t+\Delta t) \mid \vec{r}(t), \theta)$ в (5). Имеем

$$p(r(t, t+\Delta t) \mid \vec{r}(t), \theta) = \sum_{i=1}^{n} p(r(t, t+\Delta t), \nu(t) = i \mid \vec{r}(t), \theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(\nu(t) = i \mid \vec{r}(t), \theta) p(r(t, t+\Delta t) \mid \nu(t) = i, \vec{r}(t), \theta),$$

откуда (5) есть

$$p(\theta \mid \vec{r}(t+\Delta t)) =$$

$$= \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} p(\theta \mid \vec{r}(t)) \sum_{i=1}^{n} p(\nu(t) = i \mid \vec{r}(t), \theta) p(r(t, t+\Delta t) \mid \nu(t) = i, \vec{r}(t), \theta). \tag{6}$$

Рассмотрим выражение

$$p(\nu(t)=i \mid \vec{r}(t),\theta)p(r(t,t+\Delta t) \mid \nu(t)=i,\vec{r}(t),\theta),\ i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

стоящее под знаком суммирования в (6). Первый сомножитель в (7) есть вероятность того, что в момент времени t процесс $\nu(t)$ принимает значение i ($i=\overline{1,n}$) при условии, что на интервале $[0,t]$ события наступали в виде последовательности $\vec{r}(t)$. Тогда вероятность $p(\nu(t)=i \mid \vec{r}(t),\theta)$ (обозначим $w_i(t,\theta)=p(\nu(t)=i \mid \vec{r}(t),\theta)$) есть апостериорная вероятность i-го состояния процесса $\nu(t)$. Заметим, что задача нахождения апостериорных вероятностей состояний управляющего процесса $\nu(t)$ MAP-потока событий решена в [7] для алгоритма оптимального оценивания состояний MAP-потока событий.

Рассмотрим второй сомножитель в (7). В силу марковости процесса $\nu(t)$ [7] наступление событий на интервале $[t,t+\Delta t]$ зависит только от значения процесса $\nu(t)$ в момент времени t и не зависит от предыстории наступления событий на интервале $[0,t]$, поэтому

$$p(r(t,t+\Delta t) \mid \nu(t)=i,\vec{r}(t),\theta)=p(r(t,t+\Delta t) \mid \nu(t)=i,\theta),\ i=\overline{1,n}.$$

Кроме того, в силу ординарности MAP-потока событий и сколь угодной малости величины Δt можно утверждать, что величина $r(t,t+\Delta t)$ может принимать одно из двух значений: 0 (на интервале $[t,t+\Delta t]$ событий потока нет) и 1 (на интервале $[t,t+\Delta t]$ наступает событие потока).

Рассмотрим случай $r(t,t+\Delta t)=0$. Имеем

$$p(r(t,t+\Delta t)=0 \mid \nu(t)=i,\theta)=\sum_{j=1}^{n}p(r(t,t+\Delta t)=0,\nu(t+\Delta t)=j \mid \nu(t)=i,\theta),\ i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Вероятность $p(r(t,t+\Delta t)=0,\nu(t+\Delta t)=j \mid \nu(t)=i,\theta)$ есть вероятность того, что управляющий процесс $\nu(\cdot)$ в момент $t+\Delta t$ примет значение j и на интервале $[t,t+\Delta t]$ не наступит событие потока при условии, что в момент t процесс $\nu(\cdot)$ имел значение i. Если $j=i$, то в силу (1) (невозможность перехода процесса $\nu(\cdot)$ из состояния i в то же самое состояние i без наступления события) имеем $p(r(t,t+\Delta t)=0,\nu(t+\Delta t)=i \mid \nu(t)=i,\theta)=1-\lambda_i\Delta t+o(\Delta t)$. Если же $j\neq i$, то $p(r(t,t+\Delta t)=0,\nu(t+\Delta t)=j \mid \nu(t)=i,\theta)=(\lambda_i\Delta t+o(\Delta t))p_0(i,j)$. Поэтому (8) имеет вид:

$$p(r(t,t+\Delta t)=0 \mid \nu(t)=i,\theta)=1-\lambda_i\Delta t+\lambda_i\Delta t\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}p_0(i,j)+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n},$$

или, учитывая (1) и условие нормировки в (2),

$$p(r(t,t+\Delta t)=0 \mid \nu(t)=i,\theta)=1-\lambda_i z_i\Delta t+o(\Delta t),\ z_i=\sum_{j=1}^{n}p_1(i,j),\ i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), (7) в (6), учитывая введенные обозначения, получим (6) в виде

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t))=\frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))}p(\theta\,|\,\vec{r}(t))\sum_{i=1}^{n}w_i(t,\theta)(1-\lambda_i z_i\Delta t)+o(\Delta t).$$

Преобразуя последнее выражение с учетом условий нормировки $\sum_{i=1}^{n}w_i(t,\theta)=1$, $\int_{\Theta}p(\theta\,|\,\cdot)d\theta=1$, и обозначая $t=\vec{r}(t)$, $t+\Delta T=\vec{r}(t+\Delta t)$, окончательно получаем

$$p(\theta\,|\,t+\Delta t)=\frac{p(\theta\,|\,t)-\Delta t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i w_i(t,\theta)+o(\Delta t)}{1-\Delta t\int_{\Theta}p(\theta\,|\,t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i w_i(t,\theta)d\theta+o(\Delta t)},$$

откуда, обозначив

$$a(t,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i w_i(t,\theta),\ z_i=\sum_{j=1}^{n}p_1(i,j) \tag{10}$$

и устремляя Δt к нулю, нетрудно получить дифференциальное уравнение для апостериорной плотности распределения $p(\theta|t)$ вектора неизвестных параметров θ в виде:

$$\frac{dp(\theta\,|\,t)}{dt}=-p(\theta\,|\,t)\left[a(t,\theta)-\int_{\Theta}a(t,\theta)p(\theta\,|\,t)d\theta\right]. \tag{11}$$

Заметим, что дифференциальное уравнение (11) описывает поведение плотности распределения $p(\theta|t)$ на интервалах между моментами наступления событий потока. Деля правую и левую части (11) на $p(\theta|t)$ и интегрируя на интервале $[t_k,t]$, где t_k – момент наступления события потока, после несложных преобразований получаем

$$p(\theta\,|\,t)=\frac{\exp\left(-\int_{t_k}^{t}a(\tau,\theta)d\tau\right)p(\theta\,|\,t_k+0)}{\exp\left(-\int_{t_k}^{t}a(\tau,\theta)\int_{\Theta}a(\tau,\theta)p(\theta\,|\,\tau)d\theta d\tau\right)},$$

и, учитывая $\int_{\Theta}p(\theta\,|\,t)d\theta=1$, записываем окончательное решение для (11) в виде

$$p(\theta\,|\,t)=\frac{\exp\left(-\int_{t_k}^{t}a(\tau,\theta)d\tau\right)p(\theta\,|\,t_k+0)}{\int_{\Theta}\exp\left(-\int_{t_k}^{t}a(\tau,\theta)d\tau\right)p(\theta\,|\,t_k+0)d\theta}, \tag{12}$$

функция $a(\tau,\theta)$ для $t_k\le\tau\le t$ определена в (10).

Рассмотрим теперь в (7) случай $r(t,t+\Delta t)=1$ (на интервале $[t,t+\Delta t]$ наступило событие потока). Пусть это событие наступило в момент t_{k+1}, $t<t_{k+1}<t+\Delta t$. Тогда, в силу того что, согласно определению MAP-потока событий, из факта наступления события следует факт перехода процесса $\nu(t)$ из состояния в состояние, будем иметь

$$p(r(t,t+\Delta t)=1\mid\nu(t)=i,\theta)=\sum_{j=1}^{n}p(r(t,t+\Delta t)=1,\nu(t+\Delta t)=j\mid\nu(t)=i,\theta)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i\Delta t+o(\Delta t))p_1(i,j),\ i=\overline{1,n}.$$

Подставляя данное выражение в (7), (7) в (6), с учетом введенных ранее обозначений (10) и условия нормировки $\int\limits_{\Theta}p(\theta\mid\cdot)d\theta=1$, получаем (6) в виде

$$p(\theta\mid t+\Delta t)=\frac{a(t,\theta)p(\theta\mid t)\Delta t+o(\Delta t)}{\int\limits_{\Theta}a(t,\theta)p(\theta\mid t)d\theta\Delta t+o(\Delta t)}.$$

Пусть $t_{k+1}-t=\Delta t'$, $t+\Delta t-t_{k+1}=\Delta t''$ ($\Delta t'+\Delta t''=\Delta t$). Тогда последнее выражение можно записать в виде

$$p(\theta\mid t_{k+1}+\Delta t'')=\frac{a(t_{k+1}-\Delta t',\theta)p(\theta\mid t_{k+1}-\Delta t')+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}{\int\limits_{\Theta}a(t_{k+1}-\Delta t',\theta)p(\theta\mid t_{k+1}-\Delta t')d\theta+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}},$$

откуда при $\Delta t\to 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю) получаем

$$p(\theta\mid t_{k+1}+0)=\frac{a(t_{k+1}-0,\theta)p(\theta\mid t_{k+1}-0)}{\int\limits_{\Theta}a(t_{k+1}-0,\theta)p(\theta\mid t_{k+1}-0)d\theta},\tag{13}$$

функция $a(t_{k+1}-0,\theta)$ определена в (10).

Совокупность формул (10), (12), (13) вместе с алгоритмом [7] расчета апостериорных вероятностей состояний процесса $\nu(t)$ (вероятностей $w_i(t,\theta)$, $i=\overline{1,n}$ в (10)) позволяют сформулировать алгоритм расчета оценки (3) вектора неизвестных параметров MAP-потока событий:

1) в момент времени начала наблюдений $t_0=0$ задается начальная плотность распределения $p(\theta\mid 0)$, по формуле (3) рассчитывается начальное значение вектора оценок $\hat\theta(0)$; полагается $k=0$, $t_k=t_0=0$;

2) в любой момент времени t, $t>t_k$, проводится расчет апостериорной плотности $p(\theta\mid t)$ по формуле (12) и оценки $\hat\theta(t)$ по формуле (3);

3) в момент времени t_{k+1} наступления $k+1$-го события потока рассчитывается апостериорная плотность $p(\theta\mid t_{k+1}-0)$ по формуле (12), оценка $\hat\theta(t_{k+1}-0)$ по формуле (3), и производится пересчет плотности $p(\theta\mid t_{k+1}+0)$ по формуле (13) и расчет оценки $\hat\theta(t_{k+1}+0)$ по формуле (3);

4) полагается $k = k + 1$ и повторяются шаги 2), 3) алгоритма.

В заключение отметим следующее. Расчет оценок вектора неизвестных параметров θ MAP-потока событий по формулам (3), (12), (13) может быть реализован только численно в связи с тем, что апостериорные вероятности состояний процесса $\nu(t)$, входящие в (12), (13) как функции t, θ, рассчитываются, согласно [7], рекуррентно по моментам наступления событий потока на всем интервале наблюдения $[0,t]$, поэтому аналитически взять интегралы по Θ в формулах (12), (13) для нахождения явного вида апостериорной плотности $p(\theta \mid t)$ и в (3) для получения явного вида оценки $\hat{\theta}(t)$ невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000.

2. *Cox D. R., Miller H. D.* The Theory of Stochastic Processes // Methuen and Co Ltd. 1965.

3. *Lucantoni D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.

4. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестн. ТГУ. 2002. № 1 (I). С. 24–29.

5. *Васильева Л. А., Горцев А. М.* Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.

6. *Горцев А. М., Паршина М. Е.* Оценка параметров альтернирующего потока событий в условиях «мёртвого» времени // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.

7. *Шмырин И. С.* Оптимальное оценивание состояний MAP-потока событий по критерию максимума апостериорных вероятностей состояний // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 101–109.

8. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968.