ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ С СИСТЕМАМИ СО МНОГИМИ ОЧЕРЕДЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ РАЗНОТИПНЫХ ЗАЯВОК РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь
Ченстоховский университет технологий
Ченстохова, Польша
E-mail: a.pankov@grsu.by

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания (МО), которая состоит из n систем обслуживания (СМО), в i-й СМО для обслуживания формируются m_i очередей, $i=\overline{1,n}$. Состояние очереди α i-й СМО характеризуется вектором

$$\bar{k}_{i\alpha}=\left(k_{i\alpha 11},k_{i\alpha 21},\ldots,k_{i\alpha r_1 1},k_{i\alpha 12},k_{i\alpha 22},\ldots,k_{i\alpha r_2 2},\ldots,\right.$$
$$\left.k_{i\alpha 1g},k_{i\alpha 2g},\ldots,k_{i\alpha r_g g},\ldots,k_{i\alpha 1h},k_{i\alpha 2h},\ldots,k_{i\alpha r_h h}\right),$$

где $k_{i\alpha cg}$ – число заявок типа c класса g в очереди α i-й СМО, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,m_i}$, $c=\overline{1,r_g}$, $g=\overline{1,h}$, состояние i-й СМО – вектором

$$\bar{k}_i=\left(\bar{k}_{i1},\bar{k}_{i2},\ldots,\bar{k}_{im_i}\right),\ i=\overline{1,n},$$

а состояние сети – вектором

$$k=\left(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\ldots,\bar{k}_n\right).$$

Пространство состояний очереди α i-й СМО $X_{i\alpha}$ – некоторое подмножество точек с целочисленными неотрицательными координатами $(r_1+r_2+\ldots+r_n)$-мерного евклидова пространства, пространство состояний i-й СМО $X_i=X_{i1}\times X_{i2}\times\ldots\times X_{im_i}$, пространство состояний сети $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$.

Опишем кратко различные объекты и процессы, для которых сети с различными классами заявок многих типов могут применяться в качестве стохастических моделей.

1. Процессы обработки исков и премий в страховых компаниях.

Пусть h – количество видов (классов) страхования; к ним относятся, например, страхование жизни, имущества, профессий и т. д. Через r обозначим количество типов заявок в каждом виде страхования. Обычно $r=2$, при этом под обслуживанием заявок понимается обработка в каждом виде страхования премий ($c=1$) или исков ($c=2$) клиентов, заключивших с компанией договора страхования. Премии и иски различных видов могут обрабатываться одними и теми же страховщиками компании (СМО), но в ряде случаев – разными.

2. Обслуживание клиентов в банках.

Заявками в данном случае являются различные договора клиентов банков. Это могут быть договора-депозиты в валюте (первый класс заявок) и договора-депозиты в рублях (второй класс заявок), поэтому обычно $h=2$. Договора первого класса делятся на $r_1=10$ типов в зависимости от промежутков времени, на которые они заключены: короткие (1 мес.), доходные (3 мес.), сберегательные-плюс (6 мес.), ветеранские (12 мес.), профессиональные (18 мес.), срочные, рождественские, новогодние, юбилейные (24 мес.), долгосрочные (60 мес.). Примерно на такое же количество типов делятся и договора второго класса: короткие (10 дн.), краткосрочные (30 дн.), рождественские (60 дн.), праздничные (90 дн.), юбилейные (180 дн.), годовые (360 дн.). Данные взяты в АКБ «Инфобанк».

Договора различных классов и типов могут обслуживаться одними и теми же сотрудниками банков (СМО).

3. Медицинское обслуживание.

В медицинских учреждениях могут лечиться (обслуживаться) пациенты (заявки) различных видов (классов), например больные сахарным диабетом (класс 1), кардиобольные (класс 2), онкобольные (класс 3) и т. д. Больные первого класса делятся на больных сахарным диабетом первого и второго типов, т. е. $r_1=2$. Больных второго класса можно разделить на следующие типы: больные, перенесшие инфаркты; больные, страдающие пороками сердца; больные с кардитами (воспалительными заболеваниями сердца), т. е. $r_2=3$. Больных третьего класса условно можно разделить на больных с опухолями желудка, кишечника, печени, почек, т. е. $r_3=4$. Количество типов больных в каждом классе может быть увеличено, но это не влияет в данном случае на математические исследования, т. к. они проведены для произвольных h и r_g, $g=\overline{1,h}$.

Пациенты различных классов и типов могут посещать как одних и тех же врачей (СМО), так и разных.

4. Производство изделий.

В данном случае заявками служат заготовки по производству изделий, h – количество видов (классов) производимых изделий; каждая заготовка для изделия может быть нескольких типов и проходить различные этапы (СМО) обработки (обслуживания).

Будем предполагать, что состояние сети $k(t)$ является эргодическим неприводимым марковским процессом. Введем для удобства следующие обозначения:

$$\Sigma_1=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m_i}\sum_{\beta=1}^{m_j}\sum_{c=1}^{r_g}\sum_{s=1}^{r_q}\sum_{g,q=1}^{h},$$

$$\Sigma_2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m_i}\sum_{c=1}^{r_g}\sum_{g=1}^{h},\quad \Sigma_3=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m_j}\sum_{s=1}^{r_q}\sum_{q=1}^{h},$$

очевидно, что $\Sigma_1=\Sigma_2\,\Sigma_3$. Тогда из уравнений глобального равновесия следует:

$$\Sigma_1 P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)\lambda\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq},k\right)\mu\left(k_{j\beta sq}\right)+$$

$$+\Sigma_3\left[P\left(k+I_{j\beta sq}\right)\lambda\left(k+I_{j\beta sq},k\right)+P\left(k-I_{j\beta sq}\right)\lambda\left(k-I_{j\beta sq},k\right)u\left(k_{j\beta sq}\right)\right]=$$
$$=P(k)\left[\Sigma_1\lambda\left(k,k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)u\left(k_{j\beta sq}\right)+\right.$$
$$\left.+\Sigma_3\left[\lambda\left(k,k+I_{j\beta sq}\right)+\lambda\left(k,k-I_{j\beta sq}\right)u\left(k_{j\beta sq}\right)\right]\right], \qquad (1$$

где $P(k)$ – вероятность состояния сети k в стационарном режиме, $I_{i\alpha cg}$ – векто размерности $n\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{g=1}^{h} r_g$ с нулевыми компонентами, за исключением компоненты номером $n\sum_{g=1}^{h} r_g\left(\sum_{j=1}^{i-1} m_j+\alpha-1\right)+c$, которая равна 1, $\lambda(k,z)$ – интенсивность пере ходов сети из состояния k в состояние z, $u(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ – функция Хевисайда.

Наша цель – установить условия эргодичности процесса $k(t)$ и определить ег финальное стационарное распределение.

2. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим случай, когда в сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ; в очередь α i-й СМО каждая заявка типа c класса g входящего потока независимо от других поступает с вероятностью $p_{0i\alpha cg}(k)$, зависящей от состояния сети k, $\Sigma_2\, p_{0i\alpha cg}(k)=1$, $k\in X$. После завершения обслуживания в очереди α i-й СМО, когда состояние сети равно k, заявка типа c класса g переходит с вероятностью $p_{i\alpha cgj\beta sq}(k)$ в очередь β j-й СМО как заявка типа s класса q и с вероятностью $p_{i\alpha cg0}(k)$ уходит из сети,

$$\Sigma_3\, p_{i\alpha cgj\beta sq}(k)+p_{i\alpha cg0}(k)=1,\ i=\overline{1,n},\ \alpha=\overline{1,m_i},\ c=\overline{1,r_g},\ g=\overline{1,h},\ k\in X. \quad (2)$$

Времена обслуживания заявок в очередях имеют показательное распределение и пусть $\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})$ – интенсивность обслуживания заявок типа c класса g в α-й очереди i-й СМО, когда в этой очереди находятся $k_{i\alpha cg}$ заявок типа c класса g, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,m_i}$, $c=\overline{1,r_g}$, $g=\overline{1,h}$. В этом случае система уравнений для вероятностей состояний сети имеет вид

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=-\left[\lambda+\Sigma_3\,\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\right]P(k,t)+$$
$$+\Sigma_3\left\{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})P\left(k+I_{j\beta sq},t\right)+\right.$$
$$+u(k_{j\beta sq})\left[\lambda p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})P\left(k-I_{j\beta sq},t\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\Sigma_2\,\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq},t\right)\right]\right\}, \qquad (3)$$

поэтому для интенсивностей переходов между состояниями сети справедливы следующие соотношения:

$$\lambda\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq},k\right)=\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}),$$

$$\lambda\left(k,k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)=\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})p_{j\beta sqi\alpha cg}(k).$$

Теорема. Стационарные вероятности состояний сети имеют форму произведения:

$$P(k)=P(I_0)\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{c=1}^{r_g}\prod_{g=1}^{h}\frac{e_{i\alpha cg}(1)e_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}{\mu_{i\alpha cg}(1)\mu_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})},\qquad(4)$$

где произведение в правой части равно 1 при $k_{i\alpha cg}=0$, $e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left[\sum\nolimits_2 e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})+\lambda p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\right]u(k_{j\beta sq})=$$

$$=\left[\sum\nolimits_2 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)+p_{j\beta sq0}(k)\right]e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}),\ j=\overline{1,n},\ \beta=\overline{1,m_j},\ s=\overline{1,r_q},\ q=\overline{1,h},\qquad(5)$$

которая, предполагается, имеет единственное решение, I_0 – $n\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\sum\limits_{g=1}^{h}r_g$-вектор с нулевыми компонентами.

Стационарное распределение $P(k)$ существует и единственно при условии эргодичности марковского процесса $k(t)$, которое выполняется, если существует сумма бесконечного ряда

$$\Theta=\prod_{i=1}^{n}\prod_{\alpha=1}^{m_i}\prod_{c=1}^{r_g}\prod_{g=1}^{h}\frac{e_{i\alpha cg}(1)e_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}{\mu_{i\alpha cg}(1)\mu_{i\alpha cg}(2)\cdot\ldots\cdot\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg})}<\infty.\qquad(6)$$

Доказательство. Из (3) следует

$$P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)=P(k)\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)},$$

$$P\left(k+I_{j\beta sq}\right)=P(k)\frac{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)}{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)},\ P\left(k-I_{j\beta sq}\right)=P(k)\frac{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}.\qquad(7)$$

Стационарные вероятности состояний сети, как видно из (3), удовлетворяют системе уравнений

$$\sum\nolimits_1 \mu_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})P\left(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq}\right)u(k_{j\beta sq})+$$

$$+\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})P\left(k+I_{j\beta sq}\right)+$$

$$+\sum\nolimits_3 \lambda p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})P\left(k-I_{j\beta sq}\right)u(k_{j\beta sq})=$$

$$=\left[\lambda+\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\right]P(k).\qquad(8)$$

Подставив выражения (7) в систему (8), будем иметь

$$\sum\nolimits_1 p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})+$$

$$+\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1)+$$

$$+\lambda \sum\nolimits_3 p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\frac{\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq}) =$$

$$= \lambda + \sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}). \qquad (9$$

Но, используя (5), имеем

$$\sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})u(k_{j\beta sq})\left[\sum\nolimits_2 p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}+\right.$$

$$\left.+\lambda\frac{p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}\right] = \sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\left[\sum\nolimits_2 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)+p_{j\beta sq0}(k)\right] =$$

$$= \sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}) + \sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}),$$

то есть

$$\sum\nolimits_1 p_{i\alpha cgj\beta sq}(k+I_{i\alpha cg}-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})\frac{e_{i\alpha cg}(k_{i\alpha cg}+1)}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq})+$$

$$+\lambda\sum\nolimits_3 \frac{p_{0j\beta sq}(k-I_{j\beta sq})\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}{e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})}u(k_{j\beta sq}) =$$

$$= \sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}) + \sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}). \qquad (10$$

Кроме того, заменив в (5) $k_{j\beta sq}$ на $k_{j\beta sq}+1$ и взяв в обеих частях этого равенств сумму $\sum_3$, получим

$$\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k+I_{j\beta sq})e_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}+1) = \lambda\sum\nolimits_3 p_{0j\beta sq}(k) = \lambda. \qquad (11$$

Перепишем выражение (2) в виде

$$\sum\nolimits_2 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k) + p_{j\beta sq0}(k) = 1.$$

Умножив это равенство на $\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})$ и взяв сумму $\sum_3$ в обеих частях, получаем

$$\sum\nolimits_1 p_{j\beta sqi\alpha cg}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq})+$$

$$+\sum\nolimits_3 p_{j\beta sq0}(k)\mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}) = \sum\nolimits_3 \mu_{j\beta sq}(k_{j\beta sq}). \qquad (12$$

Таким образом, из (10) – (12) вытекает, что при выполнении соотношений (4) (5) выражение (9) превращается в тождество.

Покажем, что условие (6) является условием эргодичности случайного процесс $k(t)$. Воспользуемся эргодической теоремой Фостера [1], согласно которой доста точно проверить, что система уравнений

$$\sum_{z\in X} x(z)\frac{\lambda(z,k)}{\lambda(z)} = x(k),\ \lambda(z)>0,\ k\in X, \qquad (13$$

где $\lambda(z)$ – интенсивность выхода из состояния z, имеет нетривиальное решени $x(k)$, $k\in X$, такое, что $\sum_{k\in X}|x(k)|<\infty$. Действительно, беря $x(k)=\lambda(k)P(k)$, где $P(k)$ определяется соотношением (4), получим, что (13) удовлетворяется, т. к.

$$\sum_{z \in X} P(z)\lambda(z,k) = P(k)\lambda(k) = P(k) \sum_{m \in X} \lambda(k,m)\,,\ k \in X\,,$$

совпадают с уравнениями глобального равновесия (1), которым, как мы проверили, удовлетворяют вероятности $P(k)$, $k \in X$. Сходимость ряда

$$\sum_{k \in X} |x(k)| = \sum_{k \in X} \lambda(k) P(k)$$

следует из ограниченности $\lambda(k)$ и сходимости ряда (6). Значит, при выполнении условия (6) процесс $k(t)$ эргодичен. Поэтому финальное распределение является единственным стационарным распределением и, следовательно, совпадает с $\{P(k), k \in X\}$, где $P(k)$ определяется (4). Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты для сетей МО с разнотипными заявками одного класса получены в [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Foster F. G.* On stochastic matrices associated with certain queueing process // Annals of Mathematical Statistic. 1953. V. 24. N. 2. P. 355–360.

2. *Маталыцкий М. А.* Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 79–92.

3. *Маталыцкий М. А.* Сети массового обслуживания в стационарном и переходном режимах: Монография. Гродно: ГрГУ, 2001. 211 с.